



مترکس نمائی و کاربرد آن در حل سیستم معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول

پوهندوی دکتور عبدالحسین سروش

عضو کادر علمی دیپارتمنت ریاضی پوهنځی تعلیم و تربیه پوهنتون بغلان

Abdul Hussain Surosh, surosh_272@yahoo.com

Exponential Matrix and its Application in Solving System of First-Order Linear Differential Equations

Abstract

In this paper, the exponential matrix and its applications for solving a system of first-order homogeneous linear differential equations with constant coefficients are studied. The main aim of this study is to familiarize with the method of obtaining the analytical form of the general solution of such system using exponential matrix. First, some basic definitions and tools with introducing of the exponential matrix, their corresponding properties as well as their calculation method using Taylor series are presented. Then by using the analytical-descriptive method, the formula and algorithm which describe the process of reaching the general solution of the slightly system are clearly stated. The results indicate that the exponential matrix is a very useful tool in the case of obtaining the general solution of the matrix form of a system of first-order linear differential equations.

Key Words: Differential equations, matrix exponential, system of linear differential equations, system of homogeneous equations.

چکیده

در این مقاله، مترکس نمائی و موارد استعمال آن در حل سیستم معادلات دیفرانسیل خطی متجانس مرتبه اول با ضرایب ثابت مورد مطالعه قرار گرفته است. هدف اساسی این مطالعه، آشنایی با چگونگی شیوه دریافت شکل تحلیلی حل عمومی سیستم معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول به کمک مترکس نمائی می باشد. برای این منظور، ابتدا برخی تعاریف و ابزارهای اولیه همراه با معرفی مترکس نمائی، خواص و نحوه محاسبه آن به کمک سلسله تیلور مطرح شده و سپس، فرمول و الگوریتم که فرایند رسیدن به جواب عمومی سیستم مورد مطالعه را شرح می دهد با استفاده از روش تحلیلی-توصیفی به صورت واضح بیان گردیده است. نتایج نشان می دهد که مترکس نمائی یک ابزار بسیار مفیدی در زمینه دریافت جواب عمومی شکل مترکس سیستم معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول می باشد.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل، مترکس نمائی، سیستم معادلات دیفرانسیل خطی، سیستم معادلات متجانس.



۱. مقدمه

مطالعه معادلات دیفرانسیل چه از نوع معمولی و چه از نوع جزئی نقش مهمی در زندگی انسان‌ها دارد. زیرا این نوع معادلات و به خصوص معادلات دیفرانسیل معمولی در مطالعه رشد میکرو ارگانیسم‌ها، رشد جمعیت، پوسیدگی تشعشعات، در زمینه طب و در بسیار موارد دیگر نقش اساسی را ایفا می‌کند (Lobo, J. Z. & Johnson, T., 2013:12). علاوه براین، از آنجایی که بسیاری از قوانین فیزیکی به صورت معادلات دیفرانسیل بیان می‌شوند، لذا دانش صحیح در مورد چگونگی حل آن‌ها بسیار مهم و ضروری پنداشته می‌شود (Duffy, Dean G., 2022: 1).

معادلات دیفرانسیل از اواخر قرن هفدهم تا به امروز در راستایی مطالعه، توسعه و کاربرد انالیز ریاضی از اهمیت اساسی برخوردار بوده و حل آن‌ها نیز یکی از نقش‌های اصلی را در مدل سازی پدیده‌های زندگی واقعی داشته است (Dobrushkin, V. A., 2018:1). در میان معادلات دیفرانسیل معمولی با انواع و شکل‌های متفاوت آن، سیستم‌های معادلات دیفرانسیل کاربردهای گسترده‌تری داشته و در مدل سازی بسیاری از مسائل واقعی مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای مثال، مدارهای الکتریکی متشکل از حلقه‌های متعدد را می‌توان توسط سیستم‌های معادلات دیفرانسیل مدل سازی کرد و یا بحث شکار-شکارچی توسط سیستم‌های معادلات که معمولاً معروف به سیستم‌های شکار-شکارچی است، توصیف می‌گردد (Amdjadi, F. & Singh, Said-Houari, Belkacem, 2015: 141). (D., 2025: 153).

در مقاله حاضر، عطف توجه ما فقط روی مطالعه سیستم‌های معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول در حالت عادی یا معمولی متمرکز است که در آن تعداد متغیرهای وابسته (توابع مجهول) با تعداد معادلات یکسان می‌باشد. تیوری چنین سیستم‌ها با نظریه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه بالاتر موازی و بسیار نزدیک است. با این حال، ویژگی‌هایی وجود دارد که در تیوری معادلات یک دیفرانسیل مشاهده نمی‌شود (Dobrushkin, V. A., 2018: 431). بنابراین، از لابلای بحث فوق متوجه می‌شویم که بسیاری از مسائل عملی نیز منجر به شکل گیری سیستم‌های معادلات دیفرانسیل می‌شود و در این میان، سیستم‌های خطی معادلات دیفرانسیل می‌تواند یک راهکار اساسی را برای مدل سازی پدیده‌های دینامیکی در رشته‌های مختلف علمی و انجیری توصیف نماید (Amdjadi, F. & Singh, D., 2025: 431).

در واقع سیستم‌های خطی برای تجزیه و تحلیل سیستم‌های غیرخطی بسیار مفید می‌باشند. در اینجا تاکید اصلی عبارت از دریافت راه حل‌های سیستم‌های خطی با ضرایب ثابت است تا بتوان روش‌های حل را به راحتی به سیستم‌هایی با ابعاد بالاتر نیز گسترش داد. جهت دریافت جواب عمومی معادلات خطی از روش‌های معروف و متداولی مانند روش مقدار ویژه-وکتور ویژه، روش تغییر پارامتر و روش قطری سازی به صورت گسترده استفاده شده است. اما این مقاله روش کلی را مورد بحث قرار می‌دهد که در آن هم مقادیر ویژه و وکتورهای ویژه کاربرد داشته و هم زمانی که مترکس ضرایب



سیستم قطری پذیر نباشد، می تواند دریافت جواب یا حل عمومی را با استفاده از شکل معیاری مترکس جردان ممکن سازد. بنابراین، این روش به نام روش مترکس نمائی مسمی بوده و از مفهوم وکتور ویژه حتی از شکل تعمیم یافته آن، مترکس بنیادی و شکل معیاری/ کانونی مترکس جردان استفاده می نماید. در حقیقت، روش مترکس نمائی ($\exp(At)$) یک روش طبیعی تر برای پرداختن به مطالعه و دریافت حل عمومی این سیستم ها تلقی گردیده و از مطالعه یک سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی خطی منشاء گرفته است. تابع مترکس نمایی دارای خواص جالبی است که به وسیله آن می توان جواب کلی سیستم را به راحتی به دست آورد (Layek, G. C., 2024: 41, Stephen S. et al, 2013: 56).

مفهوم مترکس در سال ۱۸۵۰م توسط ریاضیدان انگلیسی جیمز جوزف سایلستور^۱ معرفی شده است. بعداً دو ریاضیدان انگلیسی دیگر به نام های ویلیام رووان همیلتون^۲ و آرتور کیلی^۳ از مترکس ها در حل سیستم های معادلات استفاده کرده اند. پس به طور کلی می توان گفت که تیوری مترکس ها در مطالعات انجیری در ارتباط با سیستم های معادلات خطی و در مطالعه تبدیل های خطی و حل مسائل مقدار ویژه از اهمیت فوق العاده ای برخوردار است (Rukmangadachari, E., 2011:1).

مترکس ها از چند جهت دیگر نیز بسیار مفید و ارزشمند می باشد. به عنوان مثال، ما می توانیم معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر را با استفاده از مترکس ها به مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول (سیستم معادلات دیفرانسیل مرتبه اول) تبدیل و بازنویسی کنیم. در واقع با استفاده از مترکس می توان روش فشرده ای را برای بیان راه حل های معادلات دیفرانسیل ارائه کرد (Borrelli R.L. & Coleman, C.S., 2004:131).

ساختار این مقاله به صورتی است که ابتدا پیشینه و اهمیت سیستم معادلات دیفرانسیل مترکس و مترکس نمائی به طور فشرده و مختصر توصیف شده و سپس برخی تعاریف و ابزارهای مورد نیاز در این مطالعه بیان گردیده است. سیستم معادلات دیفرانسیل و شکل مترکس این سیستم ها معرفی شده و بعد به مطالعه خواص اساسی مترکس نمائی، برخی قضایای مرتبط همراه با اثبات آنها پرداخته شده اند. در ادامه، ضمن معرفی رابطه حل عمومی که در نتیجه استفاده از شیوه مترکس نمائی به دست می آید، شرح واضحی از الگوریتم و مراحل حل سیستم معادلات خطی با استفاده از میتود مورد نظر صورت گرفته است. سرانجام، حل برخی مثال ها، ترسیم فضای فاز و نتیجه گیری در قسمت نهائی مقاله ذکر شده اند.

1 . James Joseph Sylvester

2 . William Rowan Hamilton

3 . Arthur Cayley

۱. برخی تعاریف و ابزارهای اولیه

تعریف ۱: هر آرایش و ترتیب اعداد یا توابع به صورت خطوط افقی (سطرها) و خطوط عمودی (ستون‌ها) مانند

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

به نام یک مترکس $m \times n$ یاد می‌شود (Zill, D. G. & Wright, W. S., 2014: 356). در مترکس فوق، اگر $m = n$ باشد آنگاه آن را یک مترکس مربعی نامیده و معمولاً به صورت فشرده زیر آرایه می‌شود:

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}$$

تعریف ۲: هر مترکس $n \times n$ بنام **مترکس قطری**^۱ یاد می‌گردد هرگاه غیر از عناصر قطراصلی، دیگر عناصر آن صفر باشند، یعنی:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

هرگاه عناصر قطراصلی مترکس قطری برابر یا یک باشد، آنگاه چنین مترکس را به نام مترکس واحد می‌نامند (Rukmangadachari, E., 2011: 3, Zill, D. G. & Wright, W. S., 2014: 432).

تعریف ۲: یک مترکس مربعی بنام **مترکس عادی**^۲ یاد می‌گردد هرگاه دیترمینانت آن مساوی با صفر شود، و برعکس، یک مترکس مربعی بنام **مترکس غیر عادی**^۳ یاد می‌شود اگر دیترمینانت آن خلاف صفر باشد (Rukmangadachari, E., 2011: 11).

تعریف ۳: یک مترکس $n \times n$ به شکل $A(t) = [a_{ij}(t)]$ را در نقطه $t = t_0$ متمادی (پیوسته) گویند اگر هر عنصر $a_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) آن در نقطه $t = t_0$ متمادی باشند (Bronson, R., 1991: 290).

¹. Diagonal matrix

². Singular

³. Nonsingular



تعریف ۴: یک مترکس $n \times n$ به صورت $A(t) = [a_{ij}(t)]$ را در نقطه $t = t_0$ مشتق پذیر می نامند اگر هر عنصر $a_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) آن در نقطه $t = t_0$ مشتق پذیر بوده و رابطه زیر برقرار باشد (Bronson, R., 1991: 290):

$$\frac{dA(t)}{dt} = \left[\frac{da_{ij}(t)}{dt} \right]. \quad (3)$$

تعریف ۵: یک مترکس $n \times n$ به صورت $A(t) = [a_{ij}(t)]$ در نقطه $t = t_0$ انتگرال پذیر گفته می شود اگر هر عنصر $a_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) آن در نقطه $t = t_0$ انتگرال پذیر بوده و رابطه زیر برقرار باشد (Bronson, R., 1991: 293):

$$\int A(t) dt = \left[\int a_{ij}(t) dt \right]. \quad (4)$$

تعریف ۶: یک مترکس مانند A مشابه (متشابه) با مترکس B گفته می شود ($A \approx B$) اگر یک مترکس معکوس پذیر P وجود داشته باشد (Bronson, R., 1991: 341) به طوری که

$$A = P^{-1}BP. \quad (5)$$

تعریف ۷: یک مترکس قطری پذیر گفته می شود اگر مشابه با یک مترکس قطری باشد. یعنی یک مترکس قطری D و یک مترکس غیرعادی P وجود داشته باشد به طوری که $D = P^{-1}AP$. به بیان دیگر، اگر A یک مترکس $n \times n$ باشد آنگاه این مترکس قطری پذیر است اگر دارای n وکتور ویژه مستقل خطی باشند. علاوه براین، مترکس A قطری پذیر است اگر دارای n مقدار ویژه مختلف باشند (Bronson, R., 1991: 293, O'Neil, Peter V., 2007: 331).

تعریف ۸: فرض کنید A یک مترکس $n \times n$ باشد، نمایی مترکس A به صورت زیر تعریف می شود (Stephen Smale et al, 2013: 123):

$$e^A = \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \quad (6)$$

۱.۲. سیستم معادلات

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول را می توان به شکل نورمال زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}\quad (7)$$

اگر توابع $g_1, g_2, \dots, g_n$ طرف راست سیستم فوق وابسته به زمان t نباشند، آنگاه سیستم معادلات متناظر را به نام یک سیستم معادلات دیفرانسیل خودگردان^۱ و در غیر صورت به نام سیستم معادلات دیفرانسیل غیر خود گردان^۲ یاد می کنند (Zill, Dennis G., 2024: 345, Dobrushkin, V. A., 2018: 362).

۲.۲. سیستم خطی

هرگاه هریک از توابع $g_1, g_2, \dots, g_n$ در معادله (7) نظر به متحول های مستقل $x_1, x_2, \dots, x_n$ خطی باشند، آنگاه شکل نورمال یک سیستم معادلات خطی مرتبه اول به صورت ذیل حاصل می گردد:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t).\end{aligned}\quad (8)$$

در اینجا فرض می شود که ضرایب $a_{ij}(t)$ و هم چنین توابع $f_i(t)$ در انتروال I متمادی باشند. اگر برای $i = 1, 2, \dots, n$ توابع $f_i(t) = 0$ باشند، آنگاه سیستم خطی مربوطه بنام سیستم خطی متجانس و در غیر آن صورت سیستم خطی غیر متجانس یاد می شوند (Zill, D. G., 2024: 345, Dobrushkin, V. A., 2018: 362).

۳.۲. شکل مترکس سیستم خطی

اگر X ، $A(t)$ و $F(t)$ بیانگر مترکس های مرتبط به صورت زیر باشند

¹ . Autonomous System

² . Nonautonomous System

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

آنگاه سیستم معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول (8) را می‌توان به شکل

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

با به طور ساده به شکل

$$\dot{X}(t) = AX(t) + F(t). \quad (11)$$

نوشت. اگر سیستم یک سیستم متجانس باشد، آنگاه شکل مترکس زیر را به‌خود می‌گیرد (Zill, D. 2024: 345):

$$\dot{X} = AX(t). \quad (12)$$

تعریف ۹: فرض کنید $S = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\}$ یک ست بنیادی جواب‌های

$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$ باشد که در آن A یک مترکس $n \times n$ و ست S غیر وابسته خطی (مستقل

خطی) اند. آنگاه مترکس

$$\Phi(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$$

به‌نام یک مترکس بنیادی سیستم متجانس $\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$ یاد شده و رابطه زیر برقرار است

:(Said-Houari, Belkacem, ۲۰۱۵:۱۵۱)

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A\Phi(t). \quad (13)$$

۴.۲. مقادیر ویژه

فرض کنید A یک مترکس مربعی $n \times n$ باشد، مترکس جدیدی به شکل $A - \lambda I$ را می‌توان تشکیل داد که در آن λ (فعلاً) یک عدد مجهول و I مترکس واحد می‌باشد. در این حالت، مقادیر ویژه مترکس A عبارت از جذور معادله مشخصه آن بوده و این معادله مشخصه دارای شکل زیر است (Amdjadi, F. & Singh, D., 2025: 154):

$$|A - \lambda I| = 0. \quad (14)$$

۵.۲. وکتورهای ویژه

فرض کنید A یک مترکس مربعی $n \times n$ و مقادیر ویژه آن دریافت شده باشد، در این صورت وکتورهای ویژه به صورت زیر دریافت می‌گردد:

- به طور جداگانه برای هر مقدار ویژه، لازم است تا سیستم معادلات زیر حل شود:

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0, \quad (15)$$

که در آن x یک وکتور ستونی به اندازه (سایز) n است. به طور مثال، برای مترکس‌های 2×2 و 3×3 ، داریم:

$$x = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

- در معادله $Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0$ ، ما در جستجوی جواب خلاف صفر هستیم و در این صورت $(A - \lambda I)$ باید عادی باشد یعنی: $|A - \lambda I| = 0$.

بدین ترتیب هر جواب $x \neq 0$ که از اثر وجود هر مقدار ویژه با استفاده از معادلات فوق به دست می‌آید به نام یک وکتور ویژه مترکس A یاد می‌گردد (Amdjadi, F. & Singh, D., 2025: 155).

برای دریافت و محاسبه مقادیر ویژه و وکتورهای ویژه یک مترکس مربعی مانند A مراحل ذیل باید در نظر گرفته شوند:

- (۱) معادله مشخصه $|A - \lambda I| = 0$ ایجاد و تشکیل نمائید.
- (۲) معادله مشخصه را حل نموده و مقدار λ را دریابید.
- (۳) وکتورهای ویژه را برای هر مقدار ویژه متناظر آن با حل نمودن $(A - \lambda I)x = 0$ دریافت کنید.

۶.۲. وکتورهای ویژه تعمیم یافته

وکتور x_m عبارت از وکتور تعمیم یافته نوع m متناظر با مترکس A و مقدار ویژه λ می‌باشد اگر $(A - \lambda I)^m x_m = 0$ ولی $(A - \lambda I)^{m-1} x_m \neq 0$ (Bronson, R., 1991: 357).

۷.۲. شکل معیاری (کانونی) مترکس جردان

مترکس مربعی J شکل کانونی جردان را دارا است اگر به شکل مترکس قطری باشد و یا به صورت یکی از شکل‌های قطری زیر بیان شده بتوانند (Bronson, R., 1991: 375):

$$J = \begin{bmatrix} D & & 0 \\ & S_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & S_r \end{bmatrix}, \quad (16)$$

یا

$$J = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_r \end{bmatrix}. \quad (17)$$

در اینجا D یک مترکس قطری و S_k ($k=1,2,\dots,r$) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}. \quad (18)$$

۲. مترکس نمائی و خواص آن

فرض کنید A یک مترکس $n \times n$ از اعداد حقیقی یا اعداد مختلط باشند. با استفاده از بسط تیلور تابع نمائی حقیقی

$$e^{\lambda} = 1 + \lambda + \frac{1}{2!} \lambda^2 + \frac{1}{3!} \lambda^3 + \cdots + \frac{1}{n!} \lambda^n + \cdots,$$

می‌توان مترکس نمائی را قرار ذیل تعریف کرد.

تعریف ۱۰. مترکس نمائی e^{At} عبارت از یک مترکس $n \times n$ است که به شکل زیر ارایه می‌شود:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots + \frac{1}{n!} A^n t^n + \dots, \quad (19)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

سلسله فوق برای تمام t متقارب بوده و از آنجایی که e^{At} یک مترکس بنیادی هست، می‌توان آن را توسط $\Phi(t)$ نیز نمایش داد (Dobrushkin, V.A., 2018: 412, O'Neil, P. V., 2007: 387).

مترکس نمائی دارای خواص زیر اند (O'Neil, P.V., 2007: 387, Layek, G. C., 2024: 58):

(۱) اگر $A = \varphi$ مترکس خالی (صفر) باشد، آنگاه $e^{At} = I$.

ثبوت: با استفاده از تعریف داریم

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots = I + \varphi t + \frac{\varphi^2 t^2}{2!} + \frac{\varphi^3 t^3}{3!} + \dots = I.$$

(۲) فرض کنید $A = I$ مترکس واحد باشد، آنگاه $e^{At} = Ie^t$.

ثبوت: می‌دانیم که $e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots$. بنابراین،

$$e^{At} = e^{It} = I + It + \frac{1}{2!} I^2 t^2 + \frac{1}{3!} I^3 t^3 + \dots = I \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right) = Ie^t.$$

(۳) فرض کنید $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ یک مترکس قطری باشد، آنگاه $e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$.

ثبوت: با توجه به تعریف داریم:

$$e^{Jt} = I + Jt + \frac{J^2 t^2}{2!} + \frac{J^3 t^3}{3!} + \dots,$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots,$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \dots,$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{\lambda_1^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda_1^3 t^3}{3!} + \dots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 t + \frac{\lambda_2^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda_2^3 t^3}{3!} + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

(۴) فرض کنيد $P^{-1}AP = J$ و از قبل می دانيم که J یک مترکس قطری یا شکل جردان است، آنگاه

$$e^{At} = P e^{Jt} P^{-1}.$$

ثبوت: داریم

$$e^{At} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k t^k}{k!},$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(PJP^{-1})^k t^k}{k!} \left[\because J = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PJP^{-1} \right],$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(PJP^{-1})^k t^k}{k!} \left[\begin{array}{l} \because (PJP^{-1})^k = (PJP^{-1})(PJP^{-1}) \dots (PJP^{-1}) \\ = PJ(P^{-1}P)J(P^{-1}P) \dots (P^{-1}P)JP^{-1} \\ = PJ^k P^{-1} \end{array} \right],$$

$$= P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{J^k t^k}{k!} \right) P^{-1},$$

$$= P e^{Jt} P^{-1}.$$

(۵) اگر $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ، آنگاه $e^{At} = e^{alt} [I \cos(bt) + J \sin(bt)]$ به طوری که I

یک مترکس واحد 2×2 و $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ می باشند.

ثبوت: باتوجه به این که $A = aI + bJ$ ، می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 e^{At} &= e^{alt+bt}, \\
 &= e^{alt} \cdot e^{bt} = e^{alt} \left[I + bJt + \frac{(bJt)^2}{2!} + \frac{(bJt)^3}{3!} + \dots \right], \\
 &= e^{alt} \left[I \left(1 - \frac{b^2 t^2}{2!} + \frac{b^4 t^4}{4!} - \dots \right) + J \left(bt - \frac{b^3 t^3}{3!} + \dots \right) \right], \\
 &= e^{alt} \left[I \cos(bt) + J \sin(bt) \right]. \because \begin{cases} J^2 = -I, J^3 = J^2 J = (-I) J = -J, \\ J^4 = J^3 J = (-J) J = -J^2 = I. \end{cases} \\
 &e^{A+B} = e^A e^B \quad \text{هر گاه } AB = BA \text{ باشد، آنگاه} \quad (6)
 \end{aligned}$$

ثبوت: فرض کنید $AB = BA$. آنگاه با استفاده از قضیه بینوم نیوتن داریم

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} A^{n-k} B^k = n! \sum_{j+k=n} \frac{A^j B^k}{j!k!}.$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
 e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{A^j B^k}{j!k!}, \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}, \\
 &= e^A e^B.
 \end{aligned}$$

$$(7) \quad \text{برای هر مترکس } A \text{ با سایز } n \times n, \text{ رابطه } \frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At} A \text{ برقرار است.}$$

ثبوت: داریم (Stephen S. et al, 2018:128)

$$\frac{d}{dt}(\exp(At)) = \frac{d}{dt}(e^{At}) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} \right),$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{At} e^{Ah} - e^{At}}{h} \right), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{Ah} - I}{h} \right) \cdot e^{At}, \\ &= A \cdot e^{At}. \end{aligned}$$

از آنجایی که A یک مترکس ثابت است، ویژگی فوق را می توان به شیوه زیر نیز ثابت کرد:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{At}) &= \frac{d}{dt} \left[I_n + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \frac{1}{4!} A^4 t^4 + \dots \right], \\ &= A + A^2 t + \frac{1}{2!} A^3 t^2 + \frac{1}{3!} A^4 t^3 + \frac{1}{4!} A^5 t^4 + \dots, \\ &= A \left(I_n + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \frac{1}{4!} A^4 t^4 + \dots \right), \\ &= A \cdot e^{At}. \end{aligned}$$

بنابراین، $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$. حال با استفاده از این ویژگی مشتق گیری مترکس نمائی، می توان نتیجه بسیار مهم زیر را مطرح کرد:

نتیجه: با ضرب کردن هردو طرف رابطه $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$ توسط $\Phi(0)$ ، داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{At}) \Phi(0) &= Ae^{At} \Phi(0), \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{At} \Phi(0)) &= Ae^{At} \Phi(0), \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(\Phi(t) \Phi^{-1}(0)) &= A \Phi(t) \Phi^{-1}(0) \Phi(0), \quad [\because e^{At} = \Phi(t) \Phi^{-1}(0)], \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(\Phi(t)) &= \dot{\Phi}(t) = A \Phi(t). \end{aligned}$$

این نتیجه نشان می دهد که مترکس بنیادی $\Phi(t)$ باید سیستم $\dot{X} = AX$ را صدق نماید. لذا این مورد برای تمام t برقرار است. بنابراین با قرار دادن $t = 0$ در $\dot{\Phi}(t) = A \Phi(t)$ ، به دست می آوریم:

$$\dot{\Phi}(0) = A \Phi(0) \Rightarrow A = \dot{\Phi}(0) \Phi^{-1}(0).$$

رابطه اخير بيان می کند که ضرایب مترکس A را می توان برحسب مترکس بنيادی $\Phi(t)$ بيان کرد (Layek, G. C., 2024: 59).

قضيه ۱. اگر $V \in \mathbb{R}^n$ یک وکتور ویژه مترکس A با مقدار ویژه λ متناظر آن باشد، آنگاه V یک وکتور ویژه

$$\exp(A) = e^A$$

متناظر با e^λ نیز هست (Stephen S. et al, 2018:128).

ثبوت: با توجه به $AV = \lambda V$ ، به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \exp(A) = e^A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{A^k V}{k!} \right), \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} V \right), \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} \right) V, \\ &= e^\lambda V. \end{aligned}$$

۴. حل سیستم معادلات خطی متجانس با ضرایب ثابت توسط روش مترکس نمائی

یک روش جذاب و جالبی که برای حل سیستم معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب به کار می رود، روش مترکس نمائی است. برای استفاده از چنین روشی، شکل مترکسی سیستم معادلات دیفرانسیل خطی متجانس (12) را در نظر می گیریم. جواب یا حل عمومی آن سیستم برحسب مترکس نمائی به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$X(t) = e^{At} C, \quad (20)$$

که در آن $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ یک وکتور n بُعدی اختیاری است. هرگاه سیستم معادلات خطی به شکل یک مسئله مقدار اولیه (مسئله کوشی) داده شده باشد، در این حالت مؤلفه یا مختصه وکتور ثابت C برحسب شرایط اولیه بیان می گردد. پس در این صورت، حل سیستم متجانس توسط رابطه زیر محاسبه می شود (Svirin, Alex, 2024):

$$X(t) = e^{At} X_0, \quad X_0 = X(t=t_0). \quad (21)$$

در این مورد قضیه زیر را داریم.

قضيه ۲. فرض کنید A یک مترکس $n \times n$ باشد، آنگاه جواب مسئله مقدار اولیه $\dot{X} = AX$ با $X(0) = X_0$ عبارت است از $\exp(At) = e^{At} X_0 = e^{At} X_0$. علاوه براین، این جواب یکتا هست.

ثبوت: با توجه به خاصیت ۷ قبل، می توان نوشت:

$$\frac{d}{dt} \left[(e^{At}) X_0 \right] = \frac{d}{dt} (Ae^{At}) X_0 = Ae^{At} X_0.$$

علاوه براین، از آنجایی که $e^{0A} X_0 = X_0$ بوده و بیان می کند که این یک جوابی از مسئله مقدار اولیه می باشد. برای این که بفهمیم که جواب های دیگری وجود ندارد، فرض می کنیم $Y(t)$ یک حل یا جواب دیگری باشد که $Y(0) = Y_0$ را صدق نموده و $Z(t) = e^{-tA} Y(t)$ را قرار می دهیم. سپس داریم

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= \left(\frac{d}{dt} e^{-tA} \right) Y(t) + e^{-tA} \dot{Y}(t), \\ &= -Ae^{-tA} Y(t) + e^{-tA} AY(t), \\ &= e^{-tA} (-A + A) Y(t), \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

بنابراین، $Z(t)$ یک عدد ثابت است. با قراردادن $t = 0$ نشان می دهد که $Z(t) = X_0$ بوده و در نتیجه $Y(t) = e^{tA} X_0$ و اثبات قضیه را کامل ساخت (Stephen S. et al, 2018:129).

۱.۴. الگورتم و مراحل حل سیستم معادلات خطی با استفاده از مترکس نمائی

سیستم معادلات (12) را در نظر گرفته و برای دریافت حل عمومی آن به کمک روش مترکس نمائی، مراحل زیر را انجام می دهیم (Svirin, Alex, 2024).

۱. ابتدا مقادیر ویژه λ مترکس ثابت A دریافت شود.
۲. وکتورهای ویژه و در صورت نیاز وکتورهای ویژه تعمیم یافته (در صورت وجود مقادیر ویژه مضاعف و چندگانه) محاسبه گردد.
۳. مترکس معکوس پذیر و غیرعادی P را با استفاده از وکتورهای ویژه دریافت شده تشکیل و سپس مترکس معکوس P^{-1} مربوطه محاسبه شود.
۴. مترکس جردان J برای مترکس داده شده A با استفاده از فرمول $J = P^{-1}AP$ دریافت گردد.
۵. با دانستن مترکس جردان J ، مترکس e^{Jt} به سادگی قابل محاسبه است. به طور مثال، شکل مترکس e^{Jt} برای چند شکل ساده مترکس جردان در جدول (۱) نشان داده شده است.



جدول ۱. نمایش چندین شکل ساده مترکس جردان و مترکس e^{Jt} .

متريکس نمائی e^{tJ}	شکل متريکس جردان J	نمونه
$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$	۱
$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} = e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$	۲
$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$	۳
$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} = e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$	۴

۶. با استفاده از فرمول $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$ ، مترکس نمائی محاسبه گردد.

۷. جواب عمومی سیستم به شکل $X(t) = e^{At}C$ ارایه شود. به طور مثال، اگر یک سیستم دو بعدی مورد نظر باشد، آنگاه حل عمومی آن به صورت

$$X(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

ارایه می شود که در آن c_1 و c_2 ثابت های اختیاری اند.

مثال ۱: حل عمومی سیستم خطی $\dot{y} = 3x + 2y$, $\dot{x} = 2x + 3y$ را با استفاده از مترکس نمائی دریافت کنید (Svirin, Alex, 2024).

حل: با توجه به الگوریتم شرح داده شده در فوق، ابتدا مقادیر ویژه مترکس A را محاسبه می نمایم.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1.$$

مرحله بعد، وکتورهای ویژه مربوط به هر مقدار ویژه را محاسبه می کنیم. پس برای عدد $\lambda_1 = 5$ ، داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 - 5 & 3 \\ 3 & 2 - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 3v_{11} - 3v_{21} = 0 \Rightarrow v_{11} - v_{21} = 0.$$

با قرار دادن $v_{21} = t$ وکتور ویژه $v_1 = (v_{11}, v_{21})^T$ را قرار زیر در می یابیم:

$$v_{21} = t \Rightarrow v_{11} = v_{21} = t \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

به طور مشابه، وکتور ویژه $v_2 = (v_{12}, v_{22})^T$ متناظر با مقدار ویژه $\lambda_2 = -1$ را محاسبه می کنیم:

$$\begin{bmatrix} 2 - (-1) & 3 \\ 3 & 2 - (-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 3v_{12} + 3v_{22} = 0 \Rightarrow v_{12} + v_{22} = 0.$$

با قرار دادن $v_{22} = t$ داریم:

$$v_{12} = -v_{22} = -t \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

حال مترکس معکوس پذیر P را با استفاده از وکتورهای ویژه v_1 و v_2 تشکیل می دهیم:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بعد مترکس معکوس P یعنی P^{-1} را در می یابیم:

$$\Delta(P) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\Delta(P)} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

از آنجایی که مقادیر ویژه در این مثال، جذور ساده معادله مشخصه است، به سادگی می توان شکل جردان آن را نوشت:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

اما بهتر است مترکس جردان را با استفاده از مترکس اصلی A دریافت نمود. بنابراین، داریم:

$$J = P^{-1}AP,$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

اکنون باید مترکس $e^{Jt} = e^{tJ}$ محاسبه شود:

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

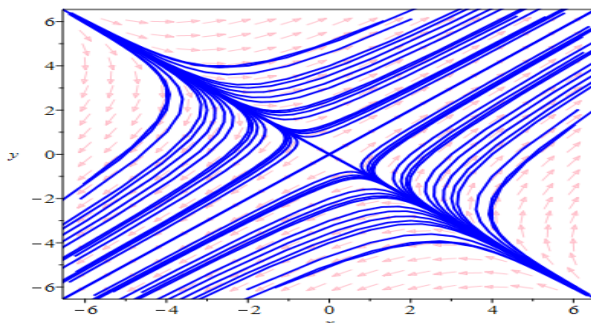
سپس مترکس نمائی e^{At} را محاسبه می کنیم:

$$e^{At} = P e^{tJ} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{5t} + e^{-t} & e^{5t} - e^{-t} \\ e^{5t} - e^{-t} & e^{5t} + e^{-t} \end{bmatrix}.$$

سرانجام حل عمومی سیستم به صورت زیر دریافت می گردد:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{5t} + e^{-t} & e^{5t} - e^{-t} \\ e^{5t} - e^{-t} & e^{5t} + e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

که در آن c_1 و c_2 پارامتر ثابت می باشند.



شکل ۱. فضای فاز سیستم $\dot{y} = 3x + 2y, \dot{x} = 2x + 3y$ با مقادیر مختلف پارامتر c_1 و c_2 .

مثال ۲: حل عمومی مسئله مقدار اولیه $\dot{y} = 4x - 2y$, $\dot{x} = x + y$ با شرط اولیه $x_0 = (2 \quad -3)^T$ به دست آورید (Layek, G. C., 2024: 63).

حل: با استفاده از معادله مشخصه مترکس A یعنی $|A - \lambda I| = 0$ ، مقادیر ویژه حقیقی و متفاوت $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = -3$ به دست می آید. حال وکتور ویژه $v_1 = (v_{11} \quad v_{12})^T$ متناظر با مقدار ویژه $\lambda_1 = 2$ را به دست می آوریم:

$$(A - 2I)v_1 = 0 \Rightarrow -v_{11} + v_{12} = 0, \quad 4v_{11} + 4v_{12} = 0.$$

در نتیجه مطابق با پروسه و فرایند حل مثال ۱، مقادیر ویژه به صورت $v_{11} = 1$ و $v_{12} = 1$ دریافت می گردد. بنابراین، $v_1 = (1 \quad 1)^T$.

به طور مشابه، وکتور ویژه مربوط به مقدار ویژه $\lambda_2 = -3$ را به صورت زیر می توان به دست آورد:
 $(A + 3I)v_2 = 0 \Rightarrow 4v_{12} + v_{22} = 0, \quad 4v_{12} + v_{22} = 0.$

با حل این سیستم، وکتورهای ویژه $v_{12} = 1$ و $v_{22} = -4$ دریافت شده و بنابراین،

$$v_2 = (1 \quad -4)^T. \text{ اکنون فرض می کنیم } P = [v_1, v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \text{ آنگاه داریم}$$

$$P^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} J = P^{-1}AP &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\therefore e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

بنابراین با توجه به رابطه (21)، حل عمومی سیستم شکل زیر را دارد:

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{At} X_0 = P e^{tJ} P^{-1} X_0, \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X_0, \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4e^{2t} + e^{-3t} & e^{2t} - e^{-3t} \\ 4e^{2t} - 4e^{-3t} & e^{2t} + 4e^{-3t} \end{bmatrix} X_0, \end{aligned}$$

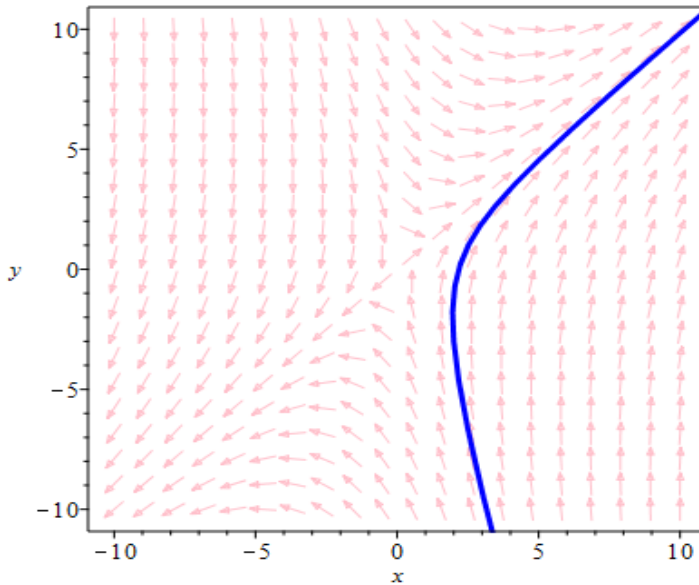
حال با استفاده از قضیه (۲) و هم‌چنین با در نظر گرفتن شرایط اولیه سیستم، می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}e^{2t} + \frac{1}{5}e^{-3t} & \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t} \\ \frac{4}{5}e^{2t} - \frac{4}{5}e^{-3t} & \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} + e^{-3t} \\ e^{2t} - 4e^{-3t} \end{bmatrix},$$

در نتیجه حل عمومی سیستم مورد نظر به صورت زیر می‌باشد:

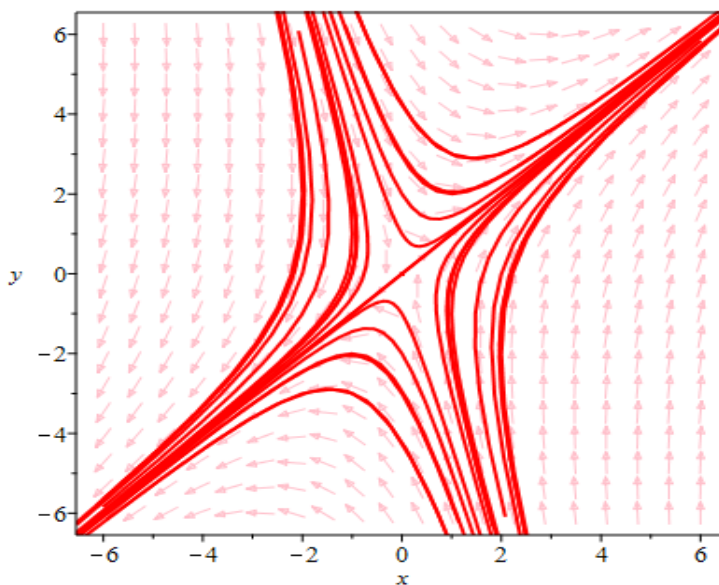
$$x(t) = e^{2t} + e^{-3t}, \quad y(t) = e^{2t} - 4e^{-3t}.$$

گراف شکل (۲) فضای فاز سیستم را برای شرایط اولیه داده شده و گراف شکل (۳) فضای فاز سیستم را برای افزایش شرایط اولیه یعنی برای $x_0 \in [-2, 2]$ و $y_0 \in [-3, 3]$ نشان می‌دهد.



شکل ۲. فضای فاز مسئله مقدار اولیه $x(0) = 2, y(0) = -3$

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 4x - 2y \end{cases}$$



شکل ۳. فضای فاز مسئله مقدار اولیه $\dot{y} = 4x - 2y, \dot{x} = x + y$ با شرایط اولیه مختلف.

۱. نتیجه گیری

در این مقاله روش‌های شناسائی و مطالعه مترکس نمائی جهت به‌کارگیری آن در حل سیستم معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول با ضرایب ثابت مطرح و مورد بررسی قرار گرفته است. ضمن مطالعه نحوه محاسبه مترکس نمائی همراه با خواص و نحوه اثبات آن‌ها، برخی ابزارهای مفید معرفی و الگوریتم یا مراحل که جهت حل و به‌دست آوردن صورت تحلیلی جواب عمومی چنین سیستم معادلات به‌کار می‌رود نیز بیان شده‌اند. همچنین در این مقاله یک روش کلی جهت محاسبه نمائی یک مترکس معرفی شده که بر مبنای آن می‌توان نمائی یک مترکس که قطری پذیر هم نباشد را با استفاده از شکل معیاری جردان محاسبه کرد. نتایج حاصل از بررسی در مورد اهمیت مترکس نمائی، بیانگر آن است که این نوع مترکس می‌تواند به عنوان یک ابزار بسیار مفیدی جهت مطالعه و دریافت حل عمومی سیستم معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول هم به صورت متجانس و هم به صورت غیر متجانس با ترکیب از روش تغییرات پارامتر مورد استفاده قرار گیرد. علاوه بر این، برای وضاحت مطلب، چند مثالی نیز با استفاده از روش مترکس نمائی حل و فضای فاز آن‌ها ترسیم گردیده‌اند.



فهرست منابع

1. Amdjadi, F. & Singh, D. (2025). Foundation Engineering Mathematics. New York: CRC Press.
2. Bronson, Richard. (1991). Matrix methods: An introduction. USA: Academic Press, Inc.
3. Borrelli R.L. & Coleman, C.S. (2004). Differential Equations: A Modeling Perspective. New York: John Wiley & Sons, Inc.
4. Duffy, Dean G. (2022). Advanced Engineering Mathematics with MATLAB. New York: CRC Press.
5. Dobrushkin, Vladimir A. (2018). Applied Differential Equations with Boundary Value Problems. New York: Taylor & Francis Group, LLC.
6. Layek, G. C. (2024). An Introduction to Dynamical Systems and Chaos, 2nd Edition. Singapore: Springer Nature Singapore Pte Ltd.
7. Lobo, Jervin Z. & Johnson, T. (2013). Solution of Differential Equations using Exponential of a Matrix. IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), 5(3): 12-17.
8. Nagle, R. K., Saff, Edward B. & Snider, David. (2012). Fundamentals of differential equations, 8th Edition. New York: Pearson Education, Inc.
9. O'Neil, Peter V. (2007). Advanced Engineering Mathematics, International Student Edition. Canada: Nelson, a division of Thomson Canada Limited.
10. Rukmangadachari, E. (2011). Engineering Mathematics-II. New Delhi: Dorling Kindersley (India) Pvt. Ltd.
11. Said-Houari, Belkacem. (2015). Differential Equations: Methods and Applications. New York: Springer International Publishing.
12. Stephen Smale, Hirsch & Devaney, Robert L. (2013). Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Elsevier Inc.
13. Svirin, Alex. (2024). Method of Matrix Exponential. <https://math24.net/method-matrix-exponential.html>.
14. Zill, Dennis G. (2024). A First Course in Differential Equations with Modeling Applications, Metric Version, 12th Edition. USA: Cengage Learning, Inc.
15. Zill, Dennis G. & Wright, Warren S.(2014). Advanced Engineering Mathematics. New York: Jones & Bartlett Learning, LLC, an Ascend Learning Company.