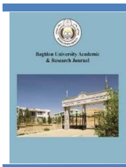

Baghlan University Academic
Research Journal
https://baghlan.edu.af/ *Vol. 12, Issue. 2, Serial No. 35 (2024) 139-164*

Wronski Determinant and its Application to Linear Differential Equations of Order-n

Abdul Hussain Surosh
Department of Mathematics, Education Faculty, Baghlan University, Afghanistan.

Corresponding Author: Abdul Hussain Surosh, **E-mail:** surosh_272@yahoo.com

Article Info

Article Type:
Review Article

Article History:

Received: 7, May, 2024

Revised: 17, May, 2024

Accepted: 17, July, 2024

Published:4, September,2024

ABSTRACT

In this paper, the goals are to introduce Wronski determinant (Wronskian) with its properties and application to solution of linear differential equation of order-n as well as determining of the corresponding fundamental sets of solutions. First, the basic properties of Wronskian determinant are studied. Then, the Gram determinant which plays an important role for determining the linear dependent and linear independent of functions is introduced in briefly manner. The Wronskian formula is obtained in order to calculate the values of fundamental sets of solutions of linear differential equation of order n at an specific interval. The results of paper indicate that the Wronskian is a useful tool to study linear independentce of functions and distinguishing the linear independent of all solutions of higher order linear differential equation in a quickly way. Therefore, when the Wronskian's value for a family of functions become zero, then these functions are said to be linearly dependent.

Keywords: Determinants of Wronski and Gram, linear differential equations, fundamental sets of solutions, linear independent.

To cite this article: Surosh, A. H: 2024. Wronski determinant and its application to linear differential equations of order-n. Baghlan University Academic Research Journal, Vol. 12, Issue. 2, Serial No. 35 - Spring – Summer (2024), 139-164.
License: RCTD – GNJR – 0018 - 23.
Publisher: University of Baghlan

د بغلان پوهنتون علمي او څېړنیزه مجله
مجله علمی ـ تحقیقی پوهنتون بغلان
https://baghlan.edu.af/ Vol 12. Issue. 2, Serial No. 35 (2024) 139-164

دیترمینانت رونسکی و کاربرد آن در معادلات دیفرانسیل‌خطی مرتبه n اُم

پوهندوی دکتور عبدالحسین‌سروش

عضو کادر علمی دیپارتمنت ریاضی پوهنځی تعلیم و تربیه پوهنتون بغلان.

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله:
مقاله مروری

تاریخ دریافت:
۱۴۰۳/۰۲/۱۸ هـش

تاریخ بازنگری:
۱۴۰۳/۰۲/۲۸ هـش

تاریخ پذیرش:
۱۴۰۳/۰۴/۲۷ هـش

تاریخ انتشار:
۱۴۰۳/۰۶/۱۴ هـش

در این مقاله، هدف معرفی دیترمینانت رونسکی (رونسکیان) با خواص و کاربرد آن در حل معادلات دیفرانسیل‌خطی مرتبه n و نیز تعیین استقلال‌خطی ست اصلی جواب‌های این معادلات می‌باشند. در ابتدا، خواص اساسی دیترمینانت رونسکیان با اثبات آن‌ها مطرح شده و سپس، ضمن معرفی اجمالی دیترمینانت گرام که هم‌چنان برای تعیین وابستگی و استقلال‌خطی توابع نقش آفرین است، با استفاده از روش کرامر، فرمولی برای رونسکیان که جهت محاسبهٔ مقدار توابع (ست اصلی جواب‌ها) در نقاطی از انتروال معین بکار می‌رود، دریافت شده است. نتایج نشان می‌دهدکه این دیترمینانت یک ابزار بسیار مفیدی در زمینه مطالعه استقلالیت‌خطی توابع و تشخیص مستقل خطی‌بودن سریع و زود هنگام تعداد جواب‌های معادلات خطی مرتبه عالی است. پس هرگاه مقدار دیترمینانت رونسکی برای خانواده‌ای از توابع صفر باشد در آن صورت چنین توابع وابستهٔ خطی است.

واژه‌های کلیدی: دیترمینانت رونسکی و گرامی، معادلات دیفرانسیل‌خطی، ست اصلی جواب‌ها، استقلال خطی.

استناد: سروش، عبدالحسین. (۱۴۰۳)، دیترمینانت رونسکی و کاربرد آن در معادلات دیفرانسیل‌خطی مرتبه n اُم، مجله علمی- تحقیقی پوهنتون بغلان، شماره۲، بهار و تابستان(۱۴۰۳)، شماره مسلسل ۳۵، دور۱۲. (۱۳۹-۱۶۴) .
ناشر: پوهنتون بغلان.

۱. مقدمه

چنان‌که می‌دانیم معادلات دیفرانسیل رول مهم و بارزی را در عرصه‌های ساینس، انجینری و علوم اجتماعی ایفا می‌نمایند که در واقع این نوع معادلات به دلیل اهمیت بسیار آن به عنوان یک پل ارتباطی میان ریاضی و ساینس توصیف می‌گردد. پس معادله دیفرانسیل نوع خاصی از معادلات دیفرانسیل است که مجهول آن یک تابع است و این تابع با استفاده از روابط بین مشتقاتش معرفی می‌شود، مانند $y''=xy'-y$ که در آن تابع $y=y\left(x\right)$ مجهول می‌باشد.

ایزاک نیوتن برای اولین بار موفق شد تا قانون حرکت اجرام میکانیکی در خلاء را به کمک معادلات دیفرانسیل بیان نماید. از آن زمان تا کنون، روز به روز بر اهمیت معادلات دیفرانسیل افزوده می‌شود. چرا که عملاً بسیاری از پدیده‌های علمی (فزیکی، کیمیاوی و جامعه شناسی) را که از اصل قطعیت پیروی می‌کنند، با استفاده از معادلات دیفرانسیل بیان می‌شود. بر مبنای این اصل، اگر پدیده‌ای را بشناسیم و نیروها و عوامل مؤثر در آن را نیز بدانیم، قادر می‌شویم تا آیندهٔ آن پدیده را (حداقل در فاصله کوتاهی زمانی) پیش‌بینی‌کنیم. بر این اساس معادلات دیفرانسیل در بسیاری از زمینه‌های علوم بطور طبیعی ظاهر می‌گردد. از حرکت یک سیستم میکانیکی ساده نظیر یک پاندول گرفته تا تحلیل حرکت اجسام سماوی، تحلیل جمعیت یک نوع به خصوص از حیوانات، پیش‌بینی رشد اقتصادی کشور و بسیاری دیگر از این نوع مسایل. امروزه ریاضی‌دانان بسیاری مشغول مطالعه و گسترش روش‌های حل این‌گونه معادلات هستند. این موضوع به اندازه‌ای جذاب و غنی است که هر روزه کارهای جدید بسیاری در این زمینه به چاپ می‌رسد (Ganapathy et al, 2010:21، نجفی‌خواه، ۱۳۹۱:۳).

مفهوم رونسکیان از لحاظ کاربرد زیاد و مشهور آن بر می‌گردد به تجربه‌های بسیاری از ریاضیدان‌ها که روشی را برای دریافت حل خصوصی معادلات دیفرانسیل معمولی‌خطی نامتجانس فراهم ساخته است (Gatto & Scherbak, 2009:2). یکی از کاربردهای مهم دیگری ورونسکی دریافت وابستگی و استقلال خطی معادلات دیفرانسیل‌خطی افزاینده[۱] (Yalcin & Celik, 2018:60) و مونوم و پولینوم (Grassi, 2016:13) است که مستلزم بحث جداگانه و مفصل می‌باشند.

[۱] Multiplicative linear differential equations

در واقع مفهوم دیترمینانت رونسکی که برای اولین بار توسط هون رونسکی[۱] فیلسوف و ریاضیدان پولندی معرفی گردیده است دارای رول خاصی در مطالعه ارتباط میان وابستگی و غیر وابستگی خطی توابع می‌باشد (Ganapathy et al, 2010:21).

بنابراین، اغلب تحقیق در مودر استقلالیت خطی توابع و به ویژه تشخیص مستقل‌خطی بودن n جواب به طور مستقیم کاری بسیار وقت‌گیر بوده و نیاز به حل یک سیستم $n\times n$ دارد. برای برون رفت و ساده‌تر شدن این کار، دو راه وجود دارد که توسط رونسکی و گرامی مطرح شده است (نجفی‌خواه، ۱۳۹۱: ۸۲).

ساختار این مقاله طوری است که ابتدا پیشینه و اهمیت معادلات دیفرانسیل و دیترمینانت رونسکی به طور فشرده و مختصر مطرح‌گردیده و سپس به معرفی و مطالعهٔ خواص اساسی رونسکیان با برخی قضایا همراه اثبات آنها پرداخته شده و دیترمینانت گرامی با نقش آن به طور اجمالی معرفی شده است. در ادامه، ضمن به دست آوردن فرمولی برای رونسکیان جهت محاسبهٔ این دیترمینانت برای معادلات دیفرانسیل مرتبه n در نقاط از دامنه، شرح مختصری از معادله دیفرانسیل‌خطی نامتجانس با فرمول دریافت حل عمومی آن صورت گرفته است. سرانجام، حل برخی مثال‌ها، مناقشه و نتیجه‌گیری در قسمت نهائی مقاله ذکر شده است.

۲. دیترمینانت رونسکی و خواص آن

تعریف۱: فرض کنید $y_1, y_2, \cdots, y_n$ توابعی $(n-1)$ بار مشتق پذیر باشند. در آن صورت دیترمینانت مرتبه n زیر

$$W\left(y_1, y_2, \cdots, y_n\right)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

به‌نام دیترمینانت رونسکیان یا به طور ساده رونسکی یاد می‌گردد (نجفی‌خواه، ۱۳۹۱: ۸۲، Kreyszig et al, 2011: 108).

---

[۱] Jozef Maria Hone Wronski (1778-1853)

باید یادآور شد که رونسکیان $W\left(y_1, y_2, \cdots, y_n\right)$ عبارت از یک تابع روی I بوده و مقدار آن در x با $W\left(y_1, y_2, \cdots, y_n\right)(x)$ یا $W\left[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\right]$ نمایش داده می‌شوند. بناءً ورونسکیان فقط برای توابع مشتق پذیر تعریف می‌گردد و عبارت از یک دیترمینانت تابع x برای ستی از توابع ثابت $y_1, y_2, \cdots, y_n$ روی I می‌باشند (Somasundaram, 2001:10).

۱,۲. خواص اساسی دیترمینانت رونسکیان

در این بخش به بررسی برخی از خصوصیات دیترمینانت رونسکی پرداخته می‌شوند (Ganapathy, 2010: 22 Somasundaram, 2001: 10,):

۱. فرض کنید $y_n, \cdots, y_2, y_1$ یک ست متشکل از n تابع باشند که روی انتروال حقیقی I تعریف شده و فرض کنید هر تابع روی این انتروال $(n-1)$ بار مشتق پذیر باشند، درآن صورت ست این توابع روی I وابسته خطی گفته می‌شود هرگاه
$$W\left(y_1, y_2, \cdots, y_n\right)=0$$
روی انتروال I برقرار باشند.

۲. اگر ورونسکیان ستی از n تابع $y_1, y_2, \cdots, y_n$ که $(n-1)$بار مشتق پذیراند برای حداقل یک نقطهٔ شامل I مساوی با صفر نباشند، در آن صورت ست از توابع $y_1, y_2, \cdots, y_n$ مستقل خطی یا غیر وابسته خطی اند.

۳. فرض کنید برای تمام $x \in I$ و $y_2(x) \neq 0$ شامل I، دیترمینانت رونسکیان آن یعنی $W\left(y_1, y_2\right)(x)=0$ باشند. در این صورت توابع y_1و y_2 روی انتروال I وابسته خطی اند.

۴. $W\left[y_1, y_2\right]=-W\left[y_2, y_1\right]$.

۵. $W\left[\alpha y_1, \beta y_2\right]=\alpha \beta W\left[y_2, y_1\right]$

که در اینجا α و β ثابت هستند.

۶. فرض کنید y_1 و y_2 دو تابع مشتق پذیر نسبت به x باشند، در این صورت
$$W\left[y_1+\alpha, y_2+\alpha\right]=W\left[y_1, y_2\right]+\alpha \frac{d}{dx}\left[y_2-y_1\right]$$

که در آن α ثابت است. همچنین با استفاده از منبع (Ganapathy, 2010: 23)، قضایا و نتایج زیر را داریم.

قضیه (۱): فرض کنید y_1 و y_2 دو تابع مشتق پذیر نسبت به x باشند، در این صورت

$$y_1W\left[\frac{y_2}{y_1},y_1\right]+y_2W\left[\frac{y_1}{y_2},y_2\right]=\frac{d}{dx}\left(y_1y_2\right). \qquad (1)$$

ثبوت: با استفاده از تعریف رونسکیان، داریم که:

$$W\left[\frac{y_2}{y_1},y_1\right]=\frac{2y_2y_1'-y_1y_2'}{y_1}=\frac{-W\left[y_1,y_2\right]+y_2y_1'}{y_1}.$$

بنابراین

$$y_1W\left[\frac{y_2}{y_1},y_1\right]=-W\left[y_1,y_2\right]+y_2y_1'. \qquad (2)$$

به طور مشابه

$$y_2W\left[\frac{y_1}{y_2},y_2\right]=W\left[y_1,y_2\right]+y_1y_2'. \qquad (3)$$

با جمع کردن رابطۀ (2) و (3)، ما به رابطۀ مطلوب (1) می رسیم.

قضیه (۲): فرض کنید ϕ_i و φ_j دو تابع مشتق پذیر نسبت به x برای $i=1,2,\cdots,n$ و $j=1,2,\cdots,m$ باشند، در این صورت

$$W\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_i,\sum_{j=1}^{m}\varphi_j\right]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}W\left[\phi_i,\varphi_j\right]. \qquad (4)$$

ثبوت: با استفاده از خواص دیترمینانت، نتیجه بدیهی است و به سادگی اثبات می‌شود.

قضیه (۳): فرض کنید ϕ_i و φ_j دو تابع مشتق پذیر نسبت به x باشند طوری که $i=1,2,\cdots,n$ و $j=1,2,\cdots,m$ ، در این صورت

$$W\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_i,\sum_{j=1}^{m}\varphi_j\right]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}W\left[\phi_i,\varphi_j\right]. \qquad (5)$$

ثبوت: با استفاده از خواص دیترمینانت، نتیجه بدیهی است و به سادگی اثبات می‌شود.

قضیه (۴): فرض کنید ϕ_i و φ_j دو تابع مشتق پذیر نسبت به x باشند طوری که $i=1,2,\cdots,n$ و $j=1,2,\cdots,n$ ، در این صورت

$$W\left[\prod_{i=1}^{n}\phi_i,\prod_{j=1}^{n}\varphi_j\right]=\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n}\phi_j\varphi_j\right)W\left[\phi_i\varphi_i\right]\right\}. \qquad (6)$$

ثبوت: برای $i=1,2$ و $j=1,2$ ، داریم:

$$\begin{aligned}W\left[\phi_1\phi_2,\varphi_1\varphi_2\right]&=\begin{vmatrix}\phi_1\phi_2 & \varphi_1\varphi_2\\ \phi_1\phi_2'+\phi_1'\phi_2 & \varphi_1\varphi_2'+\varphi_1'\varphi_2\end{vmatrix}\\&=\phi_1\varphi_1W\left[\phi_2,\varphi_2\right]+\phi_2\varphi_2W\left[\phi_1,\varphi_1\right]\\&=\sum_{i=1}^{2}\left\{\left(\prod_{j=1,\,j\neq i}^{2}\phi_j\varphi_j\right)W\left[\varphi_i,\varphi_i\right]\right\}.\end{aligned}$$

به طور مشابه، برای $i=1,2,3$ و $j=1,2,3$ ، می‌توان به دست آورد:

$$\begin{aligned}W\left[\phi_1\phi_2\phi_3,\varphi_1\varphi_2\varphi_3\right]&=\begin{vmatrix}\phi_1\phi_2\varphi_3 & \varphi_1\varphi_2\varphi_3\\ \phi_1'\phi_2\phi_3+\phi_1\phi_2'\phi_3+\phi_1\phi_2\phi_3' & \varphi_1'\varphi_2\varphi_3+\varphi_1\varphi_2'\varphi_3+\varphi_1\varphi_2\varphi_3'\end{vmatrix}\\&=\phi_1\phi_2\varphi_1\varphi_2W\left[\phi_3,\varphi_3\right]+\phi_2\phi_3\varphi_2\varphi_3W\left[\phi_1,\varphi_2\right]+\phi_1\phi_3\varphi_1\varphi_3W\left[\phi_2,\varphi_2\right]\\&=\sum_{i=1}^{3}\left\{\left(\prod_{j=1,\,j\neq i}^{3}\phi_j\varphi_j\right)W\left[\varphi_i,\varphi_i\right]\right\}.\end{aligned}$$

با ادامه این روند برای $i=1,2,\cdots,n$ و $j=1,2,\cdots,n$ ، قضیه به اثبات می‌رسد (Ganapathy, 2010: 23).

حال قضیه ای را مطرح می‌کنیم که فرمول عمومی مشتق n-اُم ورونسکیان را در دسترس ما قرار می‌دهد.

قضیه (۵): فرض کنید ϕ و φ دو تابع مشتق پذیر نسبت به x باشند، در این صورت

$$\begin{aligned}\frac{d^nW\left[\phi,\varphi\right]}{dx}&=\begin{vmatrix}\phi & \varphi\\ \phi^{(n+1)} & \varphi^{(n+1)}\end{vmatrix}+(n-1)\begin{vmatrix}\phi^{(1)} & \varphi^{(1)}\\ \phi^{(n)} & \varphi^{(n)}\end{vmatrix}\\&+\sum_{i=1}^{p}\left(g_i^{n-2i}\begin{vmatrix}\phi^{(i+1)} & \varphi^{(i+1)}\\ \phi^{(n-i)} & \varphi^{(n-i)}\end{vmatrix}\right)\end{aligned} \qquad (7)$$

که در آن

$$p = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2}; & \text{اگر } n \text{ طاق باشد} \\ \dfrac{n-2}{2}; & \text{اگر } n \text{ جفت باشد} \end{cases}$$

و برای تمام $n = 1, 2, 3, \cdots$ و $m = 2, 3, 4, \cdots$ رابطهٔ

$$g_m^n = \left(\sum_{i=1}^{n} g_{m-1}^{i+2} \right) - g_{m-1}^{2} \qquad (8)$$

و همچنان برای $m = 1$ رابطهٔ

$$g_1^n = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) - 1 \qquad (9)$$

برقرار می باشند. باید توجه داشت که $\phi^{(n)}$ و $\varphi^{(n)}$ بالترتیب نمایانگر مشتق n-اُم توابع ϕ و φ هستند (Ganapathy, 2010: 24).

ثبوت: با استفاده از تعریف دیترمینانت رونسکیان داریم:

$$W[\phi, \varphi] = \begin{vmatrix} \phi & \varphi \\ \phi^{(1)} & \varphi^{(1)} \end{vmatrix}.$$

اکنون

$$\frac{d\left(W[\phi,\varphi]\right)}{dx} = \begin{vmatrix} \phi & \varphi \\ \phi^{(2)} & \varphi^{(2)} \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} \phi & \varphi \\ \phi^{(2)} & \varphi^{(2)} \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} \phi & \varphi \\ \phi^{(1)} & \varphi^{(1)} \end{vmatrix}.$$

$$\frac{d^2\left(W[\phi,\varphi]\right)}{dx^2} = \begin{vmatrix} \phi & \varphi \\ \phi^{(3)} & \varphi^{(3)} \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} \phi^{(1)} & \varphi^{(1)} \\ \phi^{(3)} & \varphi^{(3)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \phi & \varphi \\ \phi^{(3)} & \varphi^{(3)} \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} \phi^{(1)} & \varphi^{(1)} \\ \phi^{(3)} & \varphi^{(3)} \end{vmatrix}.$$

$$\frac{d^3\left(W[\phi,\varphi]\right)}{dx^3} = \begin{vmatrix} \phi & \varphi \\ \phi^{(4)} & \varphi^{(4)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi^{(1)} & \varphi^{(1)} \\ \phi^{(3)} & \varphi^{(3)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \phi & \varphi \\ \phi^{(4)} & \varphi^{(4)} \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} \phi^{(1)} & \varphi^{(1)} \\ \phi^{(3)} & \varphi^{(3)} \end{vmatrix} + g_1^1\begin{vmatrix} \phi^{(2)} & \varphi^{(2)} \\ \phi^{(2)} & \varphi^{(2)} \end{vmatrix}.$$

$$\frac{d^4\left(W[\phi,\varphi]\right)}{dx^4}=\begin{vmatrix}\phi & \varphi\\ \phi^{(5)} & \varphi^{(5)}\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}\phi^{(1)} & \varphi^{(1)}\\ \phi^{(4)} & \varphi^{(4)}\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}\phi^{(2)} & \varphi^{(2)}\\ \phi^{(3)} & \varphi^{(3)}\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}\phi & \varphi\\ \phi^{(5)} & \varphi^{(5)}\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}\phi^{(1)} & \varphi^{(1)}\\ \phi^{(4)} & \varphi^{(4)}\end{vmatrix}+g_1^2\begin{vmatrix}\phi^{(2)} & \varphi^{(2)}\\ \phi^{(3)} & \varphi^{(3)}\end{vmatrix}.$$
$$\frac{d^5\left(W[\phi,\varphi]\right)}{dx^5}=\begin{vmatrix}\phi & \varphi\\ \phi^{(6)} & \varphi^{(6)}\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}\phi^{(1)} & \varphi^{(1)}\\ \phi^{(5)} & \varphi^{(5)}\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}\phi^{(2)} & \varphi^{(2)}\\ \phi^{(4)} & \varphi^{(4)}\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}\phi & \varphi\\ \phi^{(6)} & \varphi^{(6)}\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}\phi^{(1)} & \varphi^{(1)}\\ \phi^{(5)} & \varphi^{(5)}\end{vmatrix}+g_1^3\begin{vmatrix}\phi^{(2)} & \varphi^{(2)}\\ \phi^{(4)} & \varphi^{(4)}\end{vmatrix}+g_2^1\begin{vmatrix}\phi^{(3)} & \varphi^{(3)}\\ \phi^{(3)} & \varphi^{(3)}\end{vmatrix}.$$

در نتیجه با ادامه دادن این روند، مشتق n-ام $W[\phi,\varphi]$ با توجه به دو حالت زیر به دست می‌آید (Ganapathy, 2010: 25).

حالت اول: هرگاه n طاق باشد:

$$\frac{d^n\left(W[\phi,\varphi]\right)}{dx^n}=\begin{vmatrix}\phi & \varphi\\ \phi^{(n+1)} & \varphi^{(n+1)}\end{vmatrix}+(n-1)\begin{vmatrix}\phi^{(1)} & \varphi^{(1)}\\ \phi^{(n)} & \varphi^{(n)}\end{vmatrix}+\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(g_i^{n-2i}\begin{vmatrix}\phi^{(i+1)} & \varphi^{(i+1)}\\ \phi^{(n-i)} & \varphi^{(n-i)}\end{vmatrix}\right).$$

حالت دوم: هرگاه n جفت باشد:

$$\frac{d^n\left(W[\phi,\varphi]\right)}{dx^n}=\begin{vmatrix}\phi & \varphi\\ \phi^{(n+1)} & \varphi^{(n+1)}\end{vmatrix}+(n-1)\begin{vmatrix}\phi^{(1)} & \varphi^{(1)}\\ \phi^{(n)} & \varphi^{(n)}\end{vmatrix}+\sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}}\left(g_i^{n-2i}\begin{vmatrix}\phi^{(i+1)} & \varphi^{(i+1)}\\ \phi^{(n-i)} & \varphi^{(n-i)}\end{vmatrix}\right).$$

در نتیجه با ترکیب حالات اول و دوم، معادله (7) را به دست می‌آوریم.

نتیجه ۱: هرگاه ϕ و φ دو تابع مشتق پذیر نسبت به x باشند، در این صورت

$$\frac{d^n\left(W[\phi,\varphi]\right)}{dx^n}=\phi\varphi^{(n+1)}+(n-1)\phi^{(1)}\varphi^{(n)}+\sum_{i=1}^{p}g_i^{n-2i}\phi^{(i+1)}\varphi^{(n-i)}$$
$$-\varphi\phi^{(n+1)}-(n-1)\phi^{(n)}\varphi^{(1)}-\sum_{i=1}^{p}g_i^{n-2i}\varphi^{(i+1)}\phi^{(n-i)}, \qquad (10)$$

به طوری که

$$p = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2}; & \text{اگر } n \text{ طاق باشد} \\ \dfrac{n-2}{2}; & \text{اگر } n \text{ جفت باشد} \end{cases}$$

و برای تمام $n = 1, 2, 3, \cdots$ و $m = 2, 3, 4, \cdots$:

$$g_m^n = \left(\sum_{i=1}^{n} g_{m-1}^{i+2} \right) - g_{m-1}^2$$

و همچنان برای $m = 1$، داریم:

$$g_1^n = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) - 1.$$

.(Ganapathy, 2010: 26)

قضیه (۶): فرض کنید $y = y_1(x)$ و $y = y_2(x)$ توابعی در انتروال $I = [a, b]$ باشند، تعریف می‌کنیم:

$$\langle y_1, y_2 \rangle := \int_a^b y_1(x) y_2(x) dx.$$

پس هرگاه $y_n, \cdots, y_2, y_1$ توابعی در I باشند، در این صورت دیترمینانت گرام یا گرامی این توابع به صورت زیر تعریف می‌گردد (نجفی‌خواه، ۱۳۹۱: ۸۵):

$$\Gamma(y_1, y_2, \cdots, y_n) := \begin{vmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \langle y_2, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_n, y_1 \rangle \\ \langle y_1, y_2 \rangle & \langle y_2, y_2 \rangle & \cdots & \langle y_n, y_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle y_1, y_n \rangle & \langle y_2, y_n \rangle & \cdots & \langle y_n, y_n \rangle \end{vmatrix}. \qquad (11)$$

قضیه (۷): فرض‌کنید توابع $y_n, \cdots, y_2, y_1$ توابعی در $I \subseteq \mathbb{R}$ تعریف شوند، دراین صورت شرط لازم و کافی برای این‌که توابع مفروض در انتروال I مستقل‌خطی باشند این است که گرامی آن‌ها در این انتروال خلاف صفر باشد، در غیر این صورت وابسته خطی هست (نجفی‌خواه، ۱۳۹۱: ۸۵).

مثال ۱: نشان دهید که توابع $y_1 = 1, y_2 = \sin x$ و $y_3 = \cos x$ در $I = [0, 2\pi]$ مستقل خطی هستند.

حل: با استفاده از (11) می‌توان نوشت:

$$\Gamma(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} \int_0^{2\pi} 1dx & \int_0^{2\pi} \sin x\,dx & \int_0^{2\pi} \cos x\,dx \\ \int_0^{2\pi} \sin x\,dx & \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx & \int_0^{2\pi} \sin x\cos x\,dx \\ \int_0^{2\pi} \cos x\,dx & \int_0^{2\pi} \sin x\cos x\,dx & \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x\big|_0^{2\pi} & -\cos x\big|_0^{2\pi} & \sin x\big|_0^{2\pi} \\ -\cos x\big|_0^{2\pi} & \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\big|_0^{2\pi} & \frac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^{2\pi} \\ \sin x\big|_0^{2\pi} & \frac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^{2\pi} & \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\big|_0^{2\pi} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2\pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{vmatrix}=2\pi^3\neq 0.$$

بناءً، گرامی توابع فوق خلاف صفر بوده و مستقل خطی هستند (نجفی‌خواه، ۱۳۹۱: ۸۵).

۳. جواب های مستقل خطی معادله دیفرانسیل مرتبه n

بحث را با در نظر گرفتن معادله دیفرانسیل خطی متجانس مرتبه n-ام

$$L(y)=a_0(t)y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)y=0,\ t\in I \qquad (12)$$

شروع می‌کنیم. در اینجا $y=y(t)$ یک تابع اسکالر مجهول است و $a_i(t)$، $i=0,1,2,\cdots,n$ توابع متمادی در I بوده و $a_0(t)\neq 0$ می‌باشد. با استفاده از این نمایش، معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n را می‌توان به شکل $L(y)=0$ نوشت. در این صورت L یک عملگر در فضای توابع مشتق پذیر پیوسته می‌باشد (Somasundaram, 2001: 11).

تعریف۲: نماد L بنام یک عملگر خطی یاد می‌شود هرگاه شرط

$$L(ay_1+by_2)=aLy_1+bLy_2$$

که در آن a و b اعداد و y_1 و y_2 توابع می باشند، صدق نمایند (Kuttler, 2018: 86).

تعریف۳: اگردسته یا گروپ جواب‌های (12) یعنی

$$y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t), \qquad a<t<b$$

مستقل‌خطی باشند، آنگاه این جواب‌ها را یک ست یا سیستم اصلی جواب‌ها گوییم (سانچز، ۱۳۶۱: ۴۰). حال با توجه به تعویض‌های فصل اول منبع (سانچز، ۱۳۶۱: ۱۳)، قرار می‌دهیم $x_1=y$، $x_2=\dot{y}$، $\cdots$ و $x_n=y^{(n-1)}$. در این صورت (12) به سیستم خطی n بعدی

$$\dot{x}=A(t)x \qquad (13)$$

تبدیل می‌شود که در آن

$$A(t)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \cdots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_n(t) & & & \cdots & -\dfrac{a_1(t)}{a_0(t)} \end{vmatrix}.$$

در اینجا

$$x=x(t)=\left(x_1(t),\cdots,x_n(t)\right)=\left(y(t),\cdots,y^{(n-1)}(t)\right)$$

یک تابع وکتوری مجهول است. توجه کنید که شرط اولیهٔ $x(t_0)=x_0$ برای (13) معادل شرط اولیهٔ (12) به صورت

$$y(t_0)=y_0,\ \dot{y}(t_0)=\dot{y}_0,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(t_0)=y_0^{(n-1)} \qquad (14)$$

است که $y_0^{(n-1)},\cdots,\dot{y}_0,y_0$ مقادیر ثابت هستند. در واقع این همان شکل شرایط اولیهٔ معادلهٔ (12) است. معادلات (12) و (13) باهم معادل‌اند، زیرا هر جواب $y=\psi(t)$ معادله (12) متناظر جواب

$$x=\varphi(t)=\left(\psi(t),\dot{\psi}(t),\cdots,\psi^{(n-1)}(t)\right)$$

از معادلهٔ (13) است. برعکس، برای هر جواب $x=\varphi(t)=\left(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)\right)$ از

معادلهٔ (13) جواب $y=\varphi_1(t)$ را برای (12) خواهیم داشت و معادلهٔ (13) نتیجهٔ زیر را به دست می‌دهد:

$$\dot{y}=\dot{\varphi}_1=\varphi_2,\cdots,y^{(n-1)}=\dot{\varphi}_{n-1}=\varphi_n.$$

پس نتیجه می‌گردد که برای هر $t_0\in I$ و مقادیر ثابت $y_0^{(n-1)},\cdots,\dot{y}_0,y_0$، یک جواب منحصر به فرد (یکتا) $y=y(t)$ از (12) وجود دارد، که در $t_0\in I$ تعریف شده و در شرایط اولیهٔ (14) صدق‌کنند. لذا با توجه به معادل بودن معادلات (12) و (13) بحث سیستم های اصلی (12) و دیترمینانت رونسکیان متناظر با آن تا حد زیادی ساده می‌شود.

تعریف۴: اگر $y_n(t),\cdots,y_2(t),y_1(t)$ دسته‌ای از جواب‌های (12) باشد، در آن صورت دیترمینانت (12) نظر به t به نام دیترمینانت رونسکی $y_n(t),\cdots,y_2(t),y_1(t)$ نامیده می‌شود (سانچز، ۱۳۶۱: ۳۹).

مانند قبل اگر $y_n(t),\cdots,y_2(t),y_1(t)$ یک سیستم اصلی (12)باشد، در آن صورت مترکس متناظر با $W(t)$ ($W(t)$همان دیترمینانت رونسکیان است) مترکس اصلی نامیده می‌شود. در هر حالت توجه کنید که ستون‌های مترکس متناظر با $W(t)$ عبارت از n جواب سیستم (13) است. هم چنان توجه داشته باشید که $\mathrm{tr}A(t)=-\dfrac{a_1(t)}{a_0(t)}$ (سانچز، ۱۳۶۱: ۳۹).

۴. فرمولی برای رونسکیان

چنانچه ما در برخی از نقاط انتروال نیاز به مقدار تابع رونسکیان داریم، پس لازم است تا فرمولی را برای رونسکیان مطابق قضیه زیر به دست بیاوریم.

قضیه (۸): اگر $y_n,\cdots,y_2,y_1$، n جواب مستقل خطی

$$L(y)=a_0(t)y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)y=0$$

طوری که برای هر $t\in I$، $a_0(t)\neq 0$ و $a_n,\cdots,a_2,a_1$ توابع متمادی در I بوده و فرض می‌کنیم $t_0\in I$ باشد. در این صورت

$$W(y_1,y_2,\cdots,y_n)(t)=W(y_1,y_2,\cdots,y_n)(t_0)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds} \qquad (15)$$

رابطهٔ فوق را به شکل فشردهٔ آن نیز می‌توان ارایه کرد (Somasundaram, 2001: 29).

$$W(t)=W(t_0)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds} \quad (16)$$

ثبوت: با توجه به منبع (Somasundaram, 2001: 29)، ابتدا فرمولی را برای $n=2$ و بعد برای n کلی اثبات می‌کنیم. چنانچه y_1 و y_2 جواب‌های

$$a_0(t)y''+a_1(t)y'+a_2(t)y=0 \quad (17)$$

اند، می‌توان مقادیر y_1'' و y_2'' را از (17) قرار زیر به دست آورد:

$$a_0y_1''=-a_1y_1'-a_2y_1$$
$$a_0y_2''=-a_1y_2'-a_2y_2$$

با استفاده از این مقادیر، به دست می‌آوریم:

$$W'(y_1,y_2)=\frac{y_1}{a_0}\left(-a_1y_2'-a_2y_2\right)-\frac{y_2}{a_0}\left(-a_1y_1'-a_2y_1\right).$$

لذا

$$a_0W'(y_1,y_2)=-a_1\left(y_1y_2'-y_2y_1'\right)=-a_1W(y_1,y_2).$$

بنابراین، رونسکیان $W(y_1,y_2)$ منجر به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول زیر می‌شود:

$$W'(y_1,y_2)=-\frac{a_1}{a_0}W(y_1,y_2)$$

یا داریم که

$$W'(y_1,y_2)+\frac{a_1}{a_0}W(y_1,y_2)=0.$$

پس عامل انتگرال عبارت از $\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds}$ است. بنابراین حل آن به صورت

$$W(y_1,y_2)(t)=c\cdot\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds}$$

می‌باشد که در آن c ثابت است. با قرار دادن $t=t_0$، در می‌یابیم که $W(y_1,y_2)(t_0)=c$ و

بنابراین حل آن برای $n=2$ عبارت است از:

$$W\left(y_1,y_2\right)\left(t\right)=W\left(y_1,y_2\right)\left(t_0\right)\cdot \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds}.$$

حال برای اثبات حالت هر n کلی، به صورت زیر عمل می‌کنیم. برای سهولت در محاسبه $W\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)$را با W نمایش می‌دهیم. پس از آنجای که W یک دیترمینانت مرتبه n است، مشتق آن W' عبارت از مجموع n تا دیترمینانت $V_n,\cdots,V_2,V_1$ می‌باشند. بناءً داریم

$$W'=V_1+V_2+\cdots+V_n$$

به طوری که هر دیترمینانت V_k با مشتق گیری تنها یک سطر با حفظ $(n-1)$ سطر که هست، به دست می‌آید. بنابراین، داریم

$$W'=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & & y_n'' \\ & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & & y_n'' \\ y_1'' & y_2'' & & y_n'' \\ & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & & y_n'' \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \qquad (18)$$

در $(n-1)$ دیترمینانت اول، دو سطر در (18) باهم یکسان بوده و بنابراین مساوی به صفر می‌باشند. پس سروکار ما فقط با دیترمینانت آخری باقی می‌ماند. لذا دیترمینانت آخری در (18) به صورت زیر می‌باشد:

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & y_3^{(n)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix}. \qquad (19)$$

چنانچه $y_1, y_2, \cdots, y_n$ جواب‌های معادله دیفرانسیل‌خطی متجانس $L(y)=0$ هستند، لذا:

$$a_0 y_1^{(n)} = -a_1 y_1^{(n-1)} - \cdots - a_n y_1$$
$$a_0 y_2^{(n)} = -a_1 y_2^{(n-1)} - \cdots - a_n y_2$$
$$a_0 y_3^{(n)} = -a_1 y_3^{(n-1)} - \cdots - a_n y_3$$

$$a_0 y_n^{(n)} = -a_1 y_n^{(n-1)} - \cdots - a_n y_n \qquad (20)$$

با استفاده از ست معادلات (20)، می‌توان $y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \cdots, y_n^{(n)}$ را در دیترمینانت (19) حذف کرد:

$$W' = \frac{1}{a_0} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & & y_n'' \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & & y_n^{(n-2)} \\ \left(-a_1 y_1^{(n-1)} - \cdots - a_n y_1\right) & \left(-a_2 y_2^{(n-1)} - \cdots - a_n y_2\right) & \cdots & \left(-a_1 y_n^{(n-1)} - \cdots - a_n y_n\right) \end{vmatrix}$$

$$(21)$$

اکنون در دیترمینانت (21) با ضرب کردن a_n در سطر اول، ضرب سطر دوم با a_{n-1} و بالاخره سطر $(n-1)$ام با a_2 ضرب کرده و دو سطر نهائی را باهم جمع می‌کنیم. سپس با به کارگیری (20) در دیترمینانت مورد نظر، به دست می‌آوریم:

$$W'=\frac{1}{a_0}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_1y_1^{(n-1)} & -a_1y_2^{(n-1)} & \cdots & -a_1y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$W'=-\frac{a_1}{a_0}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

بناءً ما به معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم:

$$W'=-\frac{a_1}{a_0}W. \qquad (22)$$

عامل انتگرال (22) مساوی با $e^{\int_{t_0}^{t}\frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds}$ می‌باشد. لذا جواب (حل) معادله (22) به صورت

$$W(t)=c\cdot e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds}$$

است. حال با قرار دادن $t=t_0$، $c=W(t_0)$ به دست می‌آید. بنابراین، حل معادله (22) شکل زیر را به‌خود می‌گیرد:

$$W(t)=W(t_0)\cdot e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds}$$

که در اینجا $W(t_0)$ مقدار رونسکیان را در $t=t_0$ مشخص می‌نماید. بنابراین اثبات قضیه کامل شد.

نتیجه ۲: اگر a_0 و a_1 ثابت باشند، در آن صورت با استفاده از قضیه فوق داریم:

$$W(t)=W(t_0)\cdot e^{-\frac{a_1}{a_0}(t-t_0)}.$$

نتیجه ۳: برای هر $t_0\in I$ اگر و تنها اگر $W(y_1,y_2,\cdots,y_n)(t_0)\neq 0$ باشد در آن صورت n تا جواب $y_1,y_2,\cdots,y_n$ معادله $L(y)=0$ در انتروال I مستقل‌خطی (غیر وابستهٔ خطی) در I هست (Somasundaram, 2001: 29).

قضیه (۹): اگر L به صورت (12) داده شده باشد و فرض‌کنید برای هر $a_k(t)$ در تعریف Lدر (a,b)، انتروالی به صورت $\infty\le a<b\le\infty$، متمادی باشند. هم چنان فرض‌کنید برای $i=1,2,\cdots,n$، $Ly_i=0$. در آن صورت برای هر انتخاب اسکالرهای $C_1,C_2,\cdots C_n$، $\sum_{i=1}^{n}C_iy_i$ یک جواب معادله $Ly=0$ می‌باشد. لذا تمام جواب‌های ممکن این معادله را می‌توان به این شکل دریافت شده نمود اگر و فقط اگر برای بعضی $c\in(a,b)$، رونسکیان مساوی با صفر نباشد:

$$W\left(y_1(c),y_2(c),\cdots,y_n(c)\right)\neq 0.$$

علاوه براین، برای تمام $t\in(a,b)$، $W\left(y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t)\right)$ همواره مساوی به صفر است یا این‌که برای هر $t\in[a,b)$ هرگز برابر با صفر نمی‌شوند.

در حالتی که همه جواب‌ها به صورت مجموعه‌ای فوق به دست آمده باشد، می‌توان گفت که $\sum_{i=1}^{n}C_iy_i$ حل عمومی معادله است و توابع y_iستی از جواب‌های اصلی را شکل می‌دهند (Somasundaram, 2001: 30).

اثبات: فرض کنید برای $c\in(a,b)$، $W\left(y_1(c),y_2(c),\cdots,y_n(c)\right)\neq 0$. فرض کنید $Lz=0$. در این صورت اعداد $z(c),z'(c),\cdots,z^{(n-1)}(c)$ را در نظرگیرید. از آنجای که

$$W\left(y_1(c),y_2(c),\cdots,y_n(c)\right)\neq 0$$

و بیانگر آن‌است که مترکس

$$M(c)=\begin{pmatrix} y_1(c) & y_2(c) & \cdots & y_n(c) \\ y_1'(c) & y_2'(c) & \cdots & y_n'(c) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(c) & y_2^{(n-1)}(c) & \cdots & y_n^{(n-1)}(c) \end{pmatrix}$$

دارای معکوس می‌باشد. بنابراین یک $C=\left(C_1\cdots C_n\right)^T$ یکتایی وجود دارد به طوری که

$$M(c)C=\left(z(c)\ \ z'(c)\ \cdots\ z^{(n-1)}(c)\right)^T. \tag{23}$$

حال تابع $y(t)=\sum_{k=1}^{n}C_k y_k(t)$ را در نظرگیرید. از این‌که $Ly=0$ و برعلاوه با توجه به (23)، می‌توان نوشت:

$$y^{(k)}(c)=z^{(k)}(c),\quad k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

با استفاده از قسمت یکتایی قضیۀ (۹)، $y(t)=z(t)$ است. بنابراین، چنانچه $z(t)$ اختیاری بود، این نشان می‌دهد که تمام جواب‌ها با تغییر ثابت ها در $\sum_{k=1}^{n}C_k y_k(t)$ پیدا شده و در نتیجه این بیانگر آن‌است که برای $c\in(a,b)$ اگر

$$W\left(y_1(c),y_2(c),\cdots,y_n(c)\right)\neq 0$$

در آن صورت حل عمومی دریافت شده است.

حال فرض‌کنید برای $c\in(a,b)$، $W\left(y_1(c),y_2(c),\cdots,y_n(c)\right)=0$. در این حالت نشان خواهیم داد که حل عمومی را نمی‌توان دریافت. چنانچه رونسکیان مساوی با صفر است، پس مترکس $M(c)$ که در بالا تعریف شده معکوس پذیر نیست. بناءً $z=\left(z_0\ \ z_1\ \cdots\ z_{n-1}\right)^T$ با $C=\left(C_1\ \ C_2\ \cdots\ C_n\right)^T$ فاقد حل وجود دارد که سیستم زیر برقرار است:

$$M(c)C=z. \tag{24}$$

با توجه به قسمتی از قضیۀ (۹)، می بینیم که z ی وجود دارد به طوری که $Lz=0$ و شرایط اولیه

$$z(c)=z_0,\ z'(c)=z_1,\cdots,z_{n-1}(c)=z_{n-1}.$$

را صدق می‌نمایند. بنابراین، روشی وجود ندارد که $z(t)$ را به شکل

$$\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(t) \tag{25}$$

نوشت. زیرا اگربتوان به این شکل ارایه کرد باید $(n-1)$ بار مشتق گرفت و برای هرکدام $t=c$ را قرار داد و یک حل سیستم (24) را به دست آورد که امکان پذیر نیست (حل ندارد). بنابراین، وقتی $W\left(y_1(c), y_2(c), \cdots, y_n(c)\right)=0$،

برای هر c، نمی‌توان تمام حل‌های $Ly=0$ را با نگاه کردن به مجموعهٔ به شکل (25) برای انتخاب‌های متعدد $C_n, \cdots, C_2, C_1$ بدست آورد. این قضیه نشان می‌دهد که مؤلد (span) تعداد جواب‌های محدود $Ly=0$ باعث تمام جوابات این معادله می‌گردد. هم چنان می‌توان افزود که این جوابات علاوه براین که به نام ست اساسی جواب‌ها یاد می‌گردد، یک پایه برای فضای وکتوری تمام جواب‌ها نیز می‌باشد (Somasundaram, 2001: 30).

مثال ۲: رونسکیان سه جواب مستقل $y^{(3)} - y'' - y' + y = 0$ را در $I=[0,1]$ محاسبه کنید.

حل: دیده می‌شود که جذور معادله مشخصه $1,1,-1$ می‌باشند. بناءً سه جواب عبارتند از $y_1(t)=\mathrm{e}^{-t}, y_2(t)=\mathrm{e}^{t}$ و $y_3(t)=t\mathrm{e}^{t}$. حال $W(y_1, y_2, y_3)$ را در انتروال $[0,1]$ دریافت می‌کنیم:

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{t} & \mathrm{te}^{t} \\ -\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{t} + t\mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{t} & 2\mathrm{e}^{t} + t\mathrm{e}^{t} \end{vmatrix}.$$

برای پیدا کردن $W(y_1, y_2, y_3)(0)$ که رونسکیان در نقطهٔ $t=0$ می باشد به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$W(y_1, y_2, y_3)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

حال با استفاده از قضیه (۸) داریم که:

$$W(y_1, y_2, y_3)(t) = W(y_1, y_2, y_3)(0) \cdot \mathrm{e}^{-\int_0^t -1\, ds}$$

که با محاسبهٔ آن $W(y_1, y_2, y_3)(t) = 4e^t$ به دست می‌آید. و در نتیجه این ثابت می‌سازد که جواب‌ها مستقل‌خطی اند (Somasundaram, 2001: 32).

مثال ۳: تمام جواب‌های

$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y' - y = 0$$

را دریافت‌کنید.

حل: در این حالت معادله مشخصه $r^4 - 2r^3 + 2r - 1 = 0$ بوده و می‌توان نوشت:

$$r^4 - 2r^3 + 2r - 1 = (r-1)^3 (r+1)$$

بناءً چهار جواب $y_3(t) = t^2 e^t, y_2(t) = te^t, y_1(t) = e^t$ و $y_4(t) = e^{-t}$ دریافت می‌گردد.

حل عمومی به شکل

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 te^t + C_3 t^2 e^t + C_4 e^{-t} \qquad (26)$$

خواهد بود اگر و تنها اگر رونسکیان این توابع در برخی نقاط خلاف صفر باشند. بهتر است تا ابتدا دیترمینانت رونسکی را محاسبه کنیم:

$$W(y_1, y_2, y_3, y_4)(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & t^2 e^t & e^{-t} \\ e^t & e^t + te^t & 2te^t + t^2 e^t & -e^t \\ e^t & 2e^t + te^t & 2e^t + 4te^t + t^2 e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^t + te^t & 6e^t + 6te^t + t^2 e^t & -e^t \end{vmatrix}.$$

حال می‌توان در یک نقطه بررسی‌کرد. به طور مثال، ما $t = 0$ انتخاب می‌کنیم و داریم

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

بنابراین، معادله (26) حل عمومی می‌باشد (سانچز، ۱۳۶۱: ۴۴).

۵. معادله دیفرانسیل خطی نا متجانس مرتبه n

معادله دیفرانسیل‌خطی نامتجانس مرتبه n-ام

$$L(y)=a_0(t)y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)y=b(t) \qquad (27)$$

که در آن $t\in I$ است را در نظر می‌گیریم. طبیعی است که برای یافتن جواب عمومی از روش تغییر پارامتر باید استفاده گردد. در اینجا $y=y(t)$ یک تابع اسکالر مجهول است و $a_i(t)$، $i=0,1,2,\cdots,n$ توابع متمادی در I بوده، $a_0(t)\neq 0$ و $b(t)$ در I متمادی اند. با توجه به تعویض‌های منبع (سانچز، ۱۳۶۱: ۱۳)، که در آن $x_1=y$، $x_2=\dot{y}$، $\cdots$ و $x_n=y^{(n-1)}$، و معادله (27) را به سیستم خطی n بعدی مرتبۀ اول

$$\dot{x}=A(t)x+B(t) \qquad (28)$$

تبدیل می‌کند که در آن $A(t)$همان است که قبلاً در معادلۀ (13)داده شد و $B(t)=(0,\cdots,0,b(t))$. می‌توان نتیجه گرفت که جواب‌های (27) در I با توجه به شرایط اولیۀ

$$y(t_0)=y_0,\ \dot{y}(t_0)=\dot{y}_0,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(t_0)=y_0^{(n-1)} \qquad (29)$$

صدق می‌کنند. حل (جواب) معادله (27)به شکل $y_g=y_p+y_h$ می باشد که در آن y_h مربوط به جواب قسمت متجانس، $L(y)=0$، بوده و به صورت

$$y_h=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$$

می‌باشد. بر علاوه، y_p که به نام حل خصوصی معادله (26) مسمی است، به صورت زیر داده شده است:

$$y_p(t)=\sum_{k=1}^{n}y_k(t)\int_{t_0}^{t}\frac{W_k(s)b(s)}{a_0(s)W(y_1,y_2,\cdots,y_n)(s)}ds.$$

(سانچز، ۱۳۶۸: ۴۴، Somasundaram, 2001: 25).

قضیه (۱۰): حل عمومی معادله (27) با شرایط اولیهٔ (29) به صورت

$$y_g(t)=y_h(t)+W(t_0)^{-1}\sum_{k=1}^{n}y_k(t)\int_{t_0}^{t}\frac{W_k(s)b(s)}{\exp\left[-\int_{t_0}^{t}\frac{a_1}{a_0}(u)du\right]}ds$$

می‌باشد که در آن:

۱) $y_h(t)$ جواب معادلهٔ متجانس متناظر است که در شرایط اولیهٔ (29) صدق می‌کند،

۲) $y_n(t),\cdots,y_1(t)$ یک ست اصلی جواب‌های معادلهٔ متجانس و $W(t)$ دیترمینانت رونسکی آن‌ها است، و

۳) $W_k(t)$ دیترمینانت حاصل از $W(t)$ با تعویض کردن $(0,\cdots,0,1)$ به جای ستون k ام است (سانچز، ۱۳۶۸: ۴۵).

قابل یاد آوری است که اثبات قضیه فوق مشابه با روش اثبات قضیهٔ (۸) بوده و جهت بررسی و معلومات بیشتر به منابع (سانچز، ۱۳۶۸: ۴۵) و (Somasundaram, 2001: 26) مراجعه شود.

مثال ۴: برای معادلهٔ مرتبهٔ دوم $\ddot{y}+a_1(t)\dot{y}+a_2(t)y=b(t)$، برای هر جفت اصلی از جواب‌های معادلهٔ متجانس مانند $y_1(t)$ و $y_2(t)$ داریم: $W_2(t)=y_1(t),W_1(t)=-y_2(t)$. بناءً اگر $W(t)$ دیترمینانت رونسکی آن‌ها باشد، در آن صورت جواب $y(t)$ که در شرایط $\dot{y}(t)=\dot{y}(t_0),\ y(t_0)=y_0$ صدق می‌نماید به صورت

$$y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)-y_1(t)\int_{t_0}^{t}-\frac{y_2(s)b(s)}{W(s)}ds+y_2(t)\int_{t_0}^{t}\frac{y_1(s)b(s)}{W(s)}ds$$

می‌باشد که در آن c_1 و c_2 طوری انتخاب می‌شوند که $y_h(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ در شرایط اولیه صدق کنند. به عنوان مثال، توابع $y_1(t)=t^{\frac{1}{2}}$ و $y_2(t)=t^{\frac{1}{2}}\log t$ یک ست اصلی جواب معادلهٔ $\ddot{y}+\frac{1}{4}t^2y=0,\quad t>0$ می‌باشد که $W(t)=1$. با استفاده از عبارت فوق و قراردادن $t_0=1$، دیده می‌شود که جواب $y_g(t)$ از معادله‌ای

$$\ddot{y}+\frac{1}{4}t^2y=t^{\frac{3}{2}},\quad t>0$$

که در شرایط $\dot{y}(1)=\frac{3}{2}, y(1)=1$ صدق نماید عبارت است از

$$y_g(t)=\frac{8}{9}t^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}}\log t+\frac{1}{9}t^{\frac{7}{2}}.$$

(سانچز، ۱۳۶۸: ۴۶).

۶. بحث و مناقشه

از میان یافته‌ها و نتایج این مقاله می‌توان به این نکته اشاره کرد که رونسکیان هر دو ست اساسی جواب‌های عین معادله دیفرانسیل می‌تواند فقط توسط یک ثابت ضربی تفاوت ایجاد کند و رونسکیان هر ست اساسی جواب‌ها می‌تواند تا ثابت ضربی بدون حل معادله دیفرانسیل تعیین‌گردد (Boyce & DiPrima, 2001:150). می‌توان واقعیتی را در مورد ست‌های اساسی جواب‌ها، دیترمینانت‌های رونسکیان و استقلال‌خطی به صورت زیر مناقشه و خلاصه کرد. اما برای این کار و جهت سهولت و قابل فهم بیشتر، ما معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را انتخاب می‌کنیم.

فرض کنید y_1 و y_2 جواب‌های

$$y''+p(t)y'+q(t)y=0$$

باشند، به طوری که p و q توابع متمادی در انتروال باز I می‌باشند. در این صورت چهار عبارت زیر باهم معادل اند، زیرا هر یکی باعث برقراری سه تا دیگری می‌شوند.

۱) توابع y_1 و y_2 عبارت از ست اساسی جواب ها در انتروال I می‌باشند.

۲) توابع y_1 و y_2 در انتروال I مستقل خطی اند.

۳) برای تعدادی t_0 شامل I، $W(y_1,y_2)(t_0)\neq 0$.

۴) برای تمام t_0 شامل I، $W(y_1,y_2)(t_0)\neq 0$.

جالب است تا در اینجا تشابه میان معادله دیفرانسیل خطی متجانس مرتبه دوم و الجبر وکتوری دو بعدی را نیز یاد آور شویم. دو وکتور $\vec{a}$ و $\vec{b}$ وابستهٔ خطی گفته می‌شود هرگاه دو اسکالر λ_1 و λ_2 که حداقل یکی از آن‌ها خلاف صفر باشند وجود داشته باشد به طوری که $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}=0$؛ در غیر این صورت، آنها مستقل‌خطی اند. فرض کنید $\vec{\mathrm{i}}$ و $\vec{\mathrm{j}}$ بالترتیب وکتورهای واحدی در جهت مثبت محور های x و y باشند. از آنجایی که $\lambda_1\vec{\mathrm{i}}+\lambda_2\vec{\mathrm{j}}=0$ تنها

اگر $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ باشد، وکتورهای $\vec{\mathrm{i}}$ و $\vec{\mathrm{j}}$ مستقل‌خطی‌اند. برعلاوه، می‌دانیم که هر وکتور $\vec{a}$ با مؤلفه‌های a_1 و a_2 را می‌توان به شکل $\vec{a} = a_1\vec{\mathrm{i}} + a_2\vec{\mathrm{j}}$ نوشت که این خود بیانگر ترکیب خطی دو وکتور مستقل‌خطی $\vec{\mathrm{i}}$ و $\vec{\mathrm{j}}$ هستند. در بخش فضای وکتوری نیز عین مفهوم وجود دارد (Boyce & DiPrima, 2001:151). علاوه براین، معادلهٔ $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ با حفظ شرایط موجود فوق دارای حل عمومی به شکل $C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$ خواهد بود اگر و تنها اگر نسبت $\frac{y_2}{y_1}$ ثابت نباشد. در این صورت $W\left(y_1(t), y_2(t)\right) \neq 0$. برعکس، اگر نسبت فوق یک عدد ثابت باشد، در آن صورت با استفاده از قاعدهٔ خارج قسمت، می‌توان نشان داد که رونسکیان مساوی با صفر است (Kuttler, 2018: 29).

نکتهٔ مهمی که در مورد استقلالیت و وابسته خطی بودن با توجه به رونسکیان مطرح می‌شود این است که خانوادهٔ محدودی از توابع تحلیلی (حقیقی یا مختلط) مستقل‌خطی دارای رونسکیان خلاف صفر می‌باشد. به بیان دیگر، اگر رونسکیان خانواده‌ای از توابع حقیقی در انتروالی مساوی با صفر باشد، در آن صورت انتروالی فرعی وجود دارد که در آن این خانواده وابستهٔ خطی است. در واقع می‌توان گفت که خانوادهٔ از توابع وابستهٔ خطی دارای رونسکیان مساوی با صفر می‌باشد (نجفی‌خواه، ۱۳۶۸: ۳, Bostan & Dumas, 2013: 1).

۷. نتیجه گیری

در این مقاله روش‌های شناسائی و مطالعه استقلالیت توابع با استفاده از دو روش مجزا، یکی رونسکی و دیگری گرامی مطرح و مورد بررسی قرارگرفته است. ضمن مطالعه خواص دیترمینانت رونسکی، به اثبات برخی قضایای مهم پرداخته شده و فرمولی رونسکیان در جهت بررسی استقلال‌خطی و مقدار توابع شامل حل عمومی معادلات دیفرانسیل مرتبه n محاسبه و دریافت شده است. هم‌چنان در راستای وضاحت مطالب، چند مثالی نیز علاوه شده‌اند. نتایج حاصل از بررسی در مورد اهمیت دیترمینانت رونسکی، بیانگر آن است که رونسکیان یک ابزار بسیار مفیدی در جهت مطالعه وابستگی و استقلال خطی توابع و شناسایی مستقل خطی بودن تعداد جواب‌های شامل حل عمومی معادلات دیفرانسیل‌خطی مرتبه عالی به طور سریع و کوتاه بوده و این جواب زمانی به عنوان جواب عمومی مورد تائید است که رونسکیان توابع متشکله آن خلاف صفر باشند. برعلاوه، رونسکیان خانواده‌ای از توابع وابستهٔ خطی همواره برابر با صفر است.

منابع

سانچز، دیوید ا. (۱۳۶۸). معادلات دیفرانسیل معمولی و نظریهٔ پایداری. ترجمه: بهمن هنری و ابوالقاسم بزرگ نیا، ایران. آستان قدس: بنیاد فرهنگی رضوی.

نجفی خواه، مهدی. (۱۳۹۱). معادلات دیفرانسیل معمولی. تهران: انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران.

Bostan, Alin & Dumas, Philippe. (2013). Wronskians and linear independence. arXiv:1301.6598v1 [math.HO].

Boyce, William E.. & DiPrima, Richard C. (2001). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. USA: John Wiley & Sons, Inc.

Ganapathy, G., Murthy, S. & Arunkumar, M. (2010). Properties of Wronskian and partial Wronskian. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 63(1):21-30.

Grassi, Jayson. (2016). Calculating matrix rank using a generalization of the wronskian. A Thesis Presented to The Faculty of the Department of Mathematics California State University. Los Angeles.

Gatto, L & Scherbak, I. (2009).On Generalized Wronskians.

Kreyszig, E., Kreyszig, H. & Norminton, Edward J. (2011). Advanced Engineering Mathematics. USA: John Wiley & Sons, Inc.

Kuttler, Kenneth. (2018). Elementary Differential Equations. New York: Taylor & Francis Group, LLC.

Somasundaram, D. (2001). Ordinary Differential Equations: A first course. New Delhi: Narosa Publishing House.

Yalcin, N & Celik, E. (2018). Solution of multiplicative homogeneous linear differential equations with constant exponentials. NTMSCI, 6(2): 58-67.