



A Study on Numerical Solution of Time-fractional Inverse Parabolic Equation Using Polynomial Differential Quadrature Method

Mehrullah Mehr

Department of Mathematics, Education Faculty, Baghlan University, Afghanistan.

Corresponding Author: Mehrullah Mehr, E-mail: mehrullahmehr30@gmail.com

Article Info

ABSTRACT

Article Type:
Research Article

Article History:

Received: 7, May,
2024

Revised: 9, June,
2024

Accepted: 17, July,
2024

Published: 23,
July, 2024

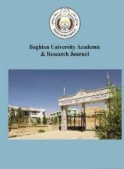
In this paper, we study a one-dimensional fractional-time inverse source problem using the differential quadrature method.

The significant advantage of the differential Quadrature method is requiring less computing time to obtain the approximate solution of the problem, and this method is highly accurate. So accurate numerical results can be obtained using this method. The purpose of this study is to implement the polynomial differential quadrature and generalized integral quadrature methods and obtain convergence and show the stability of the new problem which is designed for the development of time-fractional inverse parabolic partial differential equations. Therefore, the stability of the method is checked by adding a perturbation in the equation and an additional condition. In this research, in order to solve the inverse problem and obtain the convergence of the temperature function and the heat capacity function, two numerical examples are presented using the software (Mathematica 11.3) to show the efficiency and accuracy of the numerical method. Their errors are also compared.

Keywords:

One-dimensional parabolic equation, Differential quadrature method Generalized integral quadrature, Convergence order.

To cite this article: Mehr, M. : 2024. A Study on Numerical Solution of Time-fractional Inverse Parabolic Equation Using Polynomial Differential Quadrature Method. Baghlan University Academic Research Journal, Vol. 12, Issue. 1, Serial No. 34 - Spring - Summer (2024), 31-46. License: RCTD - GNJR - 0018 - 23.
Publisher: University of Baghlan



حل عددي معادله پارابوليك معكوس زمان-كسري با استفاده از روش مربعات

ديفرانسييل پولينومي

پوهندوی دكتور مهراالله مهر

عضو کادر علمي دپارتمنت رياضي پوهنځي تعليم و تربيه پوهنتون بغلان.

اطلاعات مقاله چکیده

نوع مقاله: مقاله علمي - تحقيق

تاريخ دريافت: ۱۴۰۳/۰۲/۱۸ هـ ش

تاريخ بازنگري: ۱۴۰۳/۰۳/۲۰ هـ ش

تاريخ پذيرش: ۱۴۰۳/۰۴/۲۷ هـ ش

تاريخ انتشار: ۱۴۰۳/۰۵/۲ هـ ش

این مقاله مسئله منبع معکوس زمان-کسری یک بعدی را با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل به بررسی گرفته است. مزیت قابل توجه روش مربعات دیفرانسیل این است که برای به دست آوردن جواب تقریبی مسئله مورد نظر به زمان محاسباتی کمتری نیاز دارد و از دقت بالای برخوردار است. با این حال می توان توسط این روش نتایج عددی دقیقی را به دست آورد. هدف این تحقیق پیاده سازی روش مربعات دیفرانسیل پولینومی و روش مربعات انتگرال تعمیم یافته و به دست آوردن همگرایی و نشان دادن پایداری طرح جدید مسئله برای توسعه معادلات دیفرانسیل جزئی پارابولیک معکوس زمانی- کسری است. از این رو، پایداری روش ها با اضافه نمودن اختلال در معادله و شرط اضافی تحقیق می شود. در این مطالعه برای حل مسئله معکوس و بدست آوردن همگرایی تابع دما و تابع ظرفیت گرما دو مثال عددی با استفاده از نرم افزار (Mathematica 11.3) برای نشان دادن کارایی و دقت روش عددی ارائه شده و همچنین، خطای آن ها مقایسه گردیده است.

واژه های کلیدی: معادله پارابولیک یک بعدی، روش مربعات دیفرانسیل، انتگرال مربعات تعمیم یافته، مرتبه همگرایی.

استناد: مهر، مهراالله. (۱۴۰۳)، حل عددی معادله پارابولیک معکوس زمان-کسری با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل پولینومی، مجله علمي-تحقيقي پوهنتون بغلان، شماره ۱، بهار و تابستان (۱۴۰۳)، شماره مسلسل ۳۴، دور ۱۲، (۳۱-۴۶).
ناشر: پوهنتون بغلان.

۱. مقدمه

مسئله پارابولیک معکوس یک معادله دیفرانسیل جزئی در علوم ساینسی مفید بوده و در مسایل مختلف مهندسی، الکترواستاتیک، الکترودینامیک، ژئوفیزیک (Dehghan 2003). در بسیاری از زمینه‌های دیگری پدیده‌های فیزیکی، دارای کاربرد وسیعی می‌باشند. معادلات دیفرانسیل جزئی پارابولیک توسط نویسندگان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته و روش‌های مختلف را جهت بهبود راه حل‌های عددی برای تعیین ضرایب نامعلوم^۱ به عنوان مسئله ضرایب معکوس^۲ مورد تجزیه و تحلیل قرار داده‌اند. پارامترها یا ضرایب نامعلوم برای فرایند فیزیکی خیلی مهم هستند، اما مستقیماً نمی‌توان اندازه‌گیری کرد؛ یا اندازه‌گیری آنها به هزینه زیاد محاسباتی نیاز دارد و حل آن‌ها دشوار است. از این‌رو، مسئله پارابولیک معکوس یک زمینه تحقیقاتی برای دانشمندان در زمینه آنالیزی عددی است که توجه بسیاری از دانشمندان و محققان را به خود جلب کرده و الگوریتم‌های زیادی توسط محققان پیشنهاد شده است.

مسئله معکوس پارابولیک یک بعدی (فرآیند انتقال حرارت) توسط روش تفاضل متناهی^۳ برای به دست آوردن پارامتر کنترل منبع در معادله انتشار مورد بررسی قرار گرفته است. (Dehghan 2003)، هم‌چنان استفاده از روش تفاضل متناهی برای شناسایی پارامتر کنترل منبع برای مسایل دو بعدی معکوس و یک الگوریتم برای پایداری مسایل دو بعدی و بالاتر ارائه شده است (Daoud and Subasi 2005). روش تغییرات تکراری^۴ معادل روش تجزیه آدومیان^۵ برای یافتن جواب یک معادله پارابولیک معکوس (یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی) مبتنی بر ضریب لاگرانژ برای شناسایی پارامترها در (Tatari and Dehghan 2007) ارائه شده، هم‌چنان از روش تغییرات تکراری^۶ برای حل مسئله معکوس وابسته به زمان استفاده شده است. توسط طرح‌های عددی معادله دیفرانسیل جزئی پارابولیک را به یک معادله غیر خطی معادل تبدیل کرده و جواب دقیق، ضرایب نامعلوم بررسی شده است (Zhou et al. 2015). روش تکراری جدید برای شناسایی ضریب نامعلوم در (Huang et al. 2018) بررسی شده است، طوری که معادله منتقل کننده حرارتی

Unknown coefficients^۱Inverse coefficients problem^۲-Finite difference^۳Variational iteration^۴Adomian decomposition^۵Variational iteration^۶

پارابولیک^۱ را به یک معادله انتگرال تبدیل کرده و تقریبی حل دقیق با چند تکرار مورد مطالعه قرار گرفته است. برای محاسبه ضریب نامعلوم و حل دقیق در یک معادله دیفرانسیل جزئی پارابولیک یک بعدی از روش تفاضل متناهی^۲ استفاده شده است و یک الگوریتم عددی مرتبه چهار مبتنی بر برون یابی ریچاردسون^۳ و تقریب پده^۴ در (Liao, Dehghan et al. 2009) ارائه شده است. مسائل معکوس کاملاً شناخته شده است که به طور کلی بد وضع^۵ هستند، بنابراین با مشکلات مختلف برای شناسایی ضرایب نامعلوم^۶ در پدیده‌های فیزیکی رو به رو می‌شویم که در این زمینه نویسندگان در (Deng et al. 2013) بر اساس ساختار کنترل بهینه، وجود، پایداری و یکتا بودن را برای یک معادله دیفرانسیل جزئی پارابولیک (واکنش-انتشار)^۷ به منظور شناسایی ضریب انتشار^۸ مورد بررسی قرار داده‌اند و یک الگوریتم تکراری را برای حل عددی مسئله کنترل بهینه به دست آورده‌اند.

یک روش عددی بر اساس توابع پایه شعاعی شناخته شده برای حل مسئله پارابولیک معکوس یک بعدی (منبع گرما) با ضریب نامعلوم وابسته به فضا در (Parand and Rad 2013) مورد تحقیق قرار گرفته است. بنابراین، نویسندگان معادله دیفرانسیل جزئی پارابولیک را به یک معادله خطی جبری تبدیل کرده و دقت روش توسط خطاهای RMS و خطای مطلق مورد آزمایش قرار گرفته است. برای تعیین ضرایب نامعلوم (منبع گرما وابسته به زمان) و دما برای معادله دیفرانسیل جزئی گرما به طور گسترده در (Hazanee et al. 2015) مورد تحقیق قرار گرفته است. روش تفاضل متناهی برای یک معادله دیفرانسیل جزئی پارابولیک معکوس با ضرایب نامعلوم وابسته به زمان تحت شرایط اضافی و تحلیل پایداری روش به طور وسیعی مورد بحث قرار گرفته است (Abdollahi and Rostamy 2019).

در این مقاله، معادلات دیفرانسیل جزئی پارابولیک معکوس زمان-کسری را با استفاده از روش عددی مربعات دیفرانسیل مورد تحقیق قرار می‌دهیم. روش DQ یک روش عددی مفید و کارآمد

Heat conductive^۱
 Finite difference-^۲
 Richardson extrapolation^۳
 Padé approximation^۴
 Ill-posed-^۵
 Unknown coefficients^۶
 Reaction-diffusion^۷
 Diffusion coefficient^۸

برای حل مسئله‌های پارابولیک معکوس است. روش مربعات دیفرانسیلی یک روش فشرده و کامل است که نیاز به تلاش محاسباتی کم دارد. بنابراین با تعداد کمتر از نقاط شبکه می‌توان نتایج عددی قابل قبول و بسیار دقیقی را به دست آورد.

در این مطالعه از روش‌های مربعات دیفرانسیل مبتنی بر چند جمله‌ای (PDQ)^۱ و روش مربعات انتگرال تعمیم یافته (GIQ)^۲ برای محاسبهٔ ضریب نامعلوم و حل دقیق در یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی پارابولیک استفاده می‌شود (Yücel and Boubaker 2012). معادلات دیفرانسیل جزئی پارابولیک معکوس زمان-کسری را به صورت زیر در نظر می‌گیریم و پارامتر کنترل منبع $a(t)$ و جواب $u(x, t)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

برای $0 < \alpha < 1$,

$$\begin{cases} D_t^{(\alpha)} u = u_{xx} + a(t)u_x + g(x, t), & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u(x, 0) = \varphi_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = f_1(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(1, t) = f_2(t), & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

و یک شرط اضافی مانند:

$$u(x_0, t) = E(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x_0 \in (0, 1). \quad (2)$$

در معادلهٔ (۲) x_0 نقطهٔ ثابت است که نقاط داخلی $(0, 1)$ را مشخص می‌کند. در حالی که $E(t)$ و $g(x, t)$ توابع معلوم هستند، $a(t)$ و $u(x, t)$ توابع نامعلوم هستند. تفسیر فیزیکی معادلهٔ (۱) و (۲) و توابع نامعلوم به طور گسترده‌ای شناخته شده است. در مسئله (۱) و (۲) $D_t^{(\alpha)} u$ مشتق کسری از نوع کاپوتو^۳ از مرتبهٔ α تابع u می‌باشد. توسط انتگرال‌گیری از هر دو طرف معادلهٔ (۱) نظر به x روی فاصله $[0, 1]$ و استفاده از شرایط مرزی ضریب نامعلوم ذیل را به دست می‌آید:

$$a(t) = \frac{\int_0^1 D_t^{(\alpha)} u(x,t) dx - [u_x(1,t) - u_x(0,t)] + \int_0^1 g(x,t) dx}{f_2(t) - f_1(t)}, \quad f_1 \neq f_2. \quad (3)$$

جایگزینی (۳) در (۱) منجر به معادلات پارابولیک معکوس زمان-کسری ذیل می‌شود:

$$\begin{cases} D_t^{(\alpha)} u = u_{xx} + \frac{\int_0^1 D_t^{(\alpha)} u(x,t) dx - [u_x(1,t) - u_x(0,t)] + \int_0^1 g(x,t) dx}{f_2(t) - f_1(t)} u_x + g(x,t), & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = f_1(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(1,t) = f_2(t), & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (4)$$

همراه با شرط اضافی مانند زیر در نظر می‌گیریم،

$$u(x_0, t) = E(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x_0 \in (0, 1). \quad (5)$$

در معادلات فوق $E(t)$ و $g(x, t)$ توابع معلوم هستند. $u(x, t)$ و $a(t)$ توابع نامعلوم هستند. تفسیر فزیک مسئله‌های ارایه شده به طوری وسیعی شناخته شده است. بنابراین مسئله (۴) روش هدایت گرما را در یک محیط ناهمگن^۱ با یک پارامتر منبع $g(x, t)$ توصیف می‌کند. تابع $u(x, t)$ دما^۲ و تابع $a(t)$ ظرفیت گرما^۳ است. معادله (۵) دما را در نقطه x_0 مشخص، در زمان t نشان می‌دهد. طوریکه $t \in [0, T]$ است (Cannon and Yin 1989).

۲. روش مربعات دیفرانسیل پولینومی

مربعات دیفرانسیلی همانند سایر روش‌ها، یک روش عددی کارآمد و موثر برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی غیر خطی است که به طور چشم‌گیری در پدیده‌های مختلف فزیک توسط محققان مورد آزمایش و تطبیق قرار گرفته است. مربعات دیفرانسیل برای اولین بار توسط بلمن

The heat conduction procedure in a in homogeneous medium^۱
Temperature^۲
Heat capacity^۳

ارایه گردید و بعداً شکل تعمیم یافتهٔ آن توسط شو^۱ ارایه شده است (Shu 2012). رویکرد روش بدین صورت است که مشتقات مکانی^۲ تابع نامعلوم را در هر نقطه‌ای از شبکه با استفاده از مجموع وزنی تمام مقادیر عملکردی در نقاط خاص و در کل حوزه محاسبات تقریب می‌زند. از آنجایی که ضرایب وزنی^۳ فقط به فاصلهٔ شبکهٔ فضایی^۴ وابسته هستند. بنابراین گسسته سازی مشتقات اول و دوم در یک نقطه x_i ، به صورت زیر ارایه شده است:

$$u_x(x_i, t) = \sum_{j=1}^N w_{ij}^{(1)} u(x_j, t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (۶)$$

$$u_{xx}(x_i, t) = \sum_{j=1}^N w_{ij}^{(2)} u(x_j, t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (۷)$$

در معادلات (۶) و (۷) $w_{ij}^{(1)}$ و $w_{ij}^{(2)}$ به ترتیب ضرایب وزنی، مشتقات مرتبهٔ اول و مرتبهٔ دوم هستند و نقاط شبکه N طول گام فرض شده است (Jiwari 2015). برای به دست آوردن ضرایب وزنی از چند جمله‌ای درونیاب لاگرانژ به عنوان توابع پایه طور زیر استفاده می‌شود:

$$r_k(x) = \frac{S(x)}{(x-x_k) S^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (۸)$$

$$\begin{cases} S(x) = (x-x_1)(x-x_2) \cdots (x-x_N). \\ S^{(1)}(x_i) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N (x_i - x_k). \end{cases} \quad (۹)$$

ضرایب وزنی $w_{ij}^{(1)}$ برای مشتقات مرتبهٔ اول با استفاده از (۸) مانند زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} w_{ij}^{(1)} = \frac{S^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j) S^{(1)}(x_j)}, & j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \\ w_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, i \neq j}^N w_{ij}^{(1)}, & i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (10)$$

و ضرایب وزنی $w_{ij}^{(2)}$ برای مشتقات مرتبه دوم را می‌توان مانند زیر به دست آورد،

$$\begin{cases} w_{ij}^{(2)} = 2w_{ij}^{(1)} \left(w_{ii}^{(1)} - \frac{1}{x_i - x_j} \right), & j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \\ w_{ii}^{(2)} = - \sum_{j=1, i \neq j}^N w_{ij}^{(2)}, & i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (11)$$

در معادلات فوق $x_i, i = 1, 2, \dots, N$ نقاط شبکه هستند که می‌توان آن‌ها را به طور دلخواه انتخاب کرد. در ادامه انتگرال‌ها که در مسئله ظاهر می‌شود، با استفاده از روش مربعات انتگرالی مورد بررسی قرار می‌گیرد. رویکرد روش به این صورت است که انتگرال $u(x)$ در یک بخش از کل دامنه را می‌توان با یک ترکیب خطی از تمام مقادیر در کل دامنه به صورت زیر تقریب زد:

$$\int_{x_i}^{x_j} u(x) dx = \sum_{k=1}^N c_k^{ij} u(x_k), \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

$$k = 1, 2, \dots, N.$$

در معادله فوق $[x_i, x_j]$ مختصات قابل تغییر هستند که می‌توان آن‌ها را به صورت $x_j = b$ و $x_i = a$ در نظر گرفت و c_k^{ij} ضرایب وزنی مربعات انتگرالی تعمیم یافته است (Shu 2012). اما ضرایب وزنی مربعات انتگرال تعمیم یافته را می‌توان به صورت ذیل محاسبه کرد:

$$c_k^{ij} = w_{jk}^I - w_{ik}^I. \quad (13)$$

بنابراین w_{jk}^I و w_{ik}^I عناصر متریکس W^I هستند که ضرایب وزنی با معکوس متریکس

$$[W^I] = [A]^{-1}$$

مورد بررسی قرار می‌گیرد و متریکس A توسط

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{x_i - c}{x_j - c} w_{ij}^{(1)}, & j \neq i, \\ a_{ii} = \frac{1}{x_i - c} + w_{ii}^{(1)}. \end{cases} \quad (14)$$

محاسبه شده است. که در آن $w_{ij}^{(1)}$ توسط ضرایب وزنی مشتق مرتبه-اول روش PDQ محاسبه شده است و c یک ثابت دلخواه می‌باشد. جزئیات بیشتر در مورد روش (GIQ) را می‌توان در (Tornabene, Fantuzzi and Bacciocchi 2018) مطالعه و دریافت کرد.

۳. تجزیه و تحلیل پایداری و همگرایی

در این بخش به تجزیه و تحلیل پایداری و همگرایی معادلات دیفرانسیل جزئی پارابولیک معکوس زمان-کسری می‌پردازیم. هم‌چنان، توزیع نقاط شبکه را برای به دست آوردن همگرایی و دقت نتایج عددی مسایل مختلف معادلات دیفرانسیل جزئی معکوس انتخاب می‌کنیم. در روش مربعات دیفرانسیلی نقاط شبکه نقش مهم را بازی می‌کند، زیرا توزیع نقطه شبکه یکی از عوامل کلیدی، مؤثر در دقت و میزان همگرایی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی می‌باشد. انتخاب نقاط شبکه بستگی به نوع مسئله دارد. بنابراین، در این مطالعه دو نوع نقاط شبکه را مورد بررسی قرار می‌گیرد.

$$x_i = \frac{i-1}{N-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (15)$$

$$x_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2i-1}{N-1} \pi \right) \right], \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (16)$$

در اینجا N تعداد نقاط شبکه را روی دامنه گسسته سازی شده مورد نظر نشان می‌دهد. نقاط شبکه (۱۵) از نوع نقاط شبکه دارای فواصل مساوی (یکنواخت) است و (۱۶) نقاط شبکه چبیشف-گوس-لوباتو^۱ است که معمولاً به طور گسترده در مقاله‌ها مورد استفاده قرار گرفته است (Tornabene et al. 2018; Tornabene et al. 2015).

۴. تطبیقات و نتایج عددی

در این تحقیق ما به منظور کارایی و صحت روش‌های مربعات دیفرانسیل برای حل مسئله‌های (۴) و (۵) می‌خواهیم دو مثال جدید را مورد بررسی قرار دهیم. هدف پیاده سازی مسائل، مؤثریت طرح جدید برای حل مسئله‌های معکوس و توسعه معادلات دیفرانسیل جزئی پارابولیک معکوس زمانی-کسری است. هم‌چنان، مؤثریت توزیع نقاط شبکه را برای به دست آوردن همگرایی مسایل مختلف معادلات دیفرانسیل جزئی معکوس با استفاده از روش‌های نام برده مورد بحث و مقایسه قرار می‌دهیم. بنابراین، در این مطالعه برای اندازه‌گیری خطاها به منظور سنجش دقت و به دست آوردن همگرایی مسئله‌های معکوس از سه معیار زیر استفاده می‌نماییم:

$$L_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N |u_i^{(\text{exact})} - u_i^{(\text{app})}|^2}. \quad (17)$$

$$L_\infty = \max_i^N |u_i^{(\text{exact})} - u_i^{(\text{app})}|. \quad (18)$$

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |u_i^{(\text{exact})} - u_i^{(\text{app})}|^2}. \quad (19)$$

در معادلات فوق، N تعداد نقاط شبکه است و $u_i^{(\text{exact})}$ ، $u_i^{(\text{app})}$ به ترتیب حل تقریبی و حل دقیق را نشان می‌دهند. برای این منظور از مرتبه همگرایی^۱ که توسط فرمول زیر محاسبه شده است، استفاده می‌شود:

$$\text{Order} = \frac{1}{\log 2} \log \frac{E\left(\frac{1}{2} N_2\right)}{E(N_1)}. \quad (20)$$

در روابط فوق، E خطاهای L_2 ، L_∞ و RMS خطای ریشه میانگین مربعات است که برای N_2 ، N_1 به دست می‌آید و N_2 ، N_1 تعداد نقاط شبکه را نشان می‌دهد. در ادامه برای حل مسئله پارابولیک معکوس زمان - کسری روش‌های مربعات دیفرانسیل پولینومی و روش مربعات انتگرالی را پیاده سازی نموده و مسئله‌های (۴) و (۵) را گسسته سازی می‌کنیم. در این تحقیق برای گسسته سازی

Order of convergence^۱

مشتق کاپوتو از تقریب مشتق مرتبه اول کسری زمان^۱ و تقریب مشتق کسری مرتبه دوم در زمان، که توسط محققان در (Li et al. 2011) مورد بررسی قرار گرفته است استفاده می‌شود. مانند:

$$\begin{cases} D_t^{(\alpha)} u(x, t_n) = \frac{(\Delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=0}^{n-1} b_i \frac{u(x, t_{n-i}) - u(x, t_{n-i-1})}{\Delta t}, \\ b_i = (i+1)^{1-\alpha} - i^{1-\alpha}. \end{cases} \quad (21)$$

پس $t_n = n \Delta t, n = 1, 2, \dots, M$ که در آن $\Delta t = \frac{T}{M}$ اندازه گام زمان را نشان می‌دهد. گسسته سازی ضرایب مشتق کسری را مانند ذیل در نظر می‌گیریم:

$$b_i = \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left((i+1)^{1-\alpha} - i^{1-\alpha} \right).$$

تذکر: برای نشان دادن ثبات روش‌های مورد نظر، یک اختلال^۲ به اندازه $\varepsilon = 10^{-2}$ را در تابع سمت راست $g(x, t)$ و شرایط اضافی $E(t)$ را اعمال می‌کنیم.

در ادامه دو مثال را مورد بررسی قرار می‌دهیم. جواب‌های عددی، مقایسه خطاها، گراف خطاها و مرتبه همگرایی را با استفاده از نرم افزار Mathematica 11.3 با کامپیوتر که دارای ظرفیت CPU (۱,۷۳ گیگاهرتز) و پردازنده (Intel(R) Core(TM) i7) می‌باشد، به دست می‌آوریم.

مثال ۱. با قرار دادن $M = 10, \alpha = 1/5$ ، مسئله‌های (۴) و (۵) را در نظر می‌گیریم با

$$g(x, t) = -2(-1+x)^2 - 8(-1+x)x - 2x^2 - 4\pi^2 \cos(2\pi x) + \frac{t^{1-\alpha}(1+x)}{32 \Gamma(1-\alpha)}$$

$$- \frac{1}{40\sqrt{\pi}} \left((-1+t)^2 \sqrt{t} (t + 80x(1-3x+2x^2)) + 80\pi \sin(2\pi x) \right),$$

$$\varphi_0(x) = (-1+x)^2 x^2 - \cos(2\pi x),$$

$$f_1(t) = -1 + \frac{t}{40},$$

$$f_2(t) = -1 + \frac{t}{20}, \quad (22)$$

$$E(t) = -0.283417 + 0.03t,$$

حل دقیق مسئله معکوس عبارت است از:

$$\begin{cases} u(x,t) = (-1+x)^2 x^2 + \frac{1}{40}t(1+x) - \cos(2\pi x), \\ a(t) = \frac{(-1+x)^2 \sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}. \end{cases} \quad (23)$$

حال $T = 1, x_0 = 0.2$ را در نظر می‌گیریم. در این مثال برای دقت جواب مسئله معکوس از نقطه شبکه چی پی‌شف استفاده می‌کنیم. نرم خطاهای L_2, L_∞ ، ریشه میانگین مربعات RMS و مرتبه همگرایی در جدول ۱ ذکر گردیده است و همگرایی نمودار خطاهای توابع در شکل ۱ و گراف های تابع ظرفیت گرما $a(t)_N$ و $a(t)$ در شکل ۲ مورد مقایسه قرار گرفته است.

جدول ۱. مقایسه خطاها و مرتبه همگرایی با $\alpha = 0.2, M = 10, x_0 = 0.2$ برای مثال ۱.

	N	L_2	Order of L_2	L_∞	Order of L_∞	RMS	Order of RMS
$u(x,t)$	11	4.91E-3		1.95E-3		1.49E-3	
	18	1.10E-5	8.8	2.22E-6	9.8	2.58E-6	9.2
	19	2.24E-9	12.3	6.26E-10	11.8	5.13E-10	12.3
	20	1.14E-9	0.9	3.68E-10	0.8	2.54E-10	1.0
	21	4.33E-11	4.7	1.50E-11	4.6	9.46E-12	4.7
$a(t)$	11	1.18E-1		9.67E-2		1.48E-3	
	18	2.68E-5	12.1	1.39E-5	12.8	2.58E-6	9.2
	19	5.43E-9	12.3	3.92E-9	11.8	5.13E-10	12.3
	20	2.69E-9	1.0	2.35E-9	0.7	2.54E-10	1.0
	21	1.06E-10	4.7	9.37E-11	4.6	9.46E-12	4.7

مثال ۲. معادلات (۴)، (۵) همراه با معادلات زیر در نظر می‌گیریم:

$$g(x,t) = e^{x+\pi} \left(-t - \frac{2 - 2e^{-t} - 2t + t^2}{2+t} + \frac{5t^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right),$$

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 0, \\ f_1(t) &= e^\pi t, \\ f_2(t) &= e^{1+\pi} t, \\ E(t) &= 24.3271 t. \end{aligned} \tag{۲۴}$$

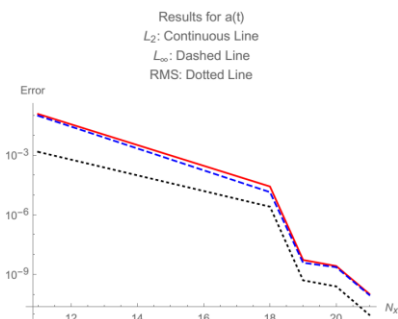
حل دقیق مسئله معکوس عبارت است از

$$\begin{cases} u(x, t) = t e^{x+\pi}, \\ a(t) = \frac{2 - 2e^{-t} - 2t + t^2}{2t + t^2}. \end{cases} \tag{۲۵}$$

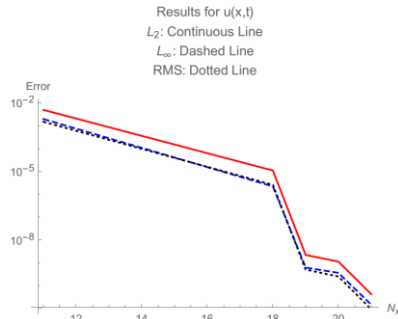
که در آن $M = 10$ ، $\alpha = 4/5$ و $x_0 = 0.05$ ، $T = 1$. در این مثال برای میزان همگرایی از نقاط شبکه یکنواخت استفاده می‌کنیم. خطاهای L_2 ، L_∞ ، ریشهٔ میانگین مربعات RMS و مرتبهٔ همگرایی در جدول ۲ ارایه و نمودارهای خطاهای توابع در شکل ۱ مورد مقایسه قرار گرفته است. گراف تابع ظرفیت گرما $a(t)$ و $a(t)_N$ در شکل ۲ ارایه گردیده است.

جدول ۲. مقایسه خطاها و مرتبه همگرایی با $\alpha = 0.8$ ، $M = 10$ ، $x_0 = 0.05$ برای مثال ۲.

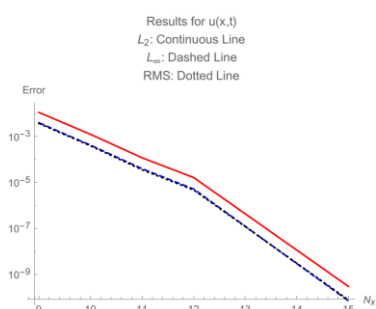
	N	L_2	Order of L_2	L_∞	Order of L_∞	RMS	Order of RMS
$u(x, t)$	9	1.13E-2		4.04E-3		3.78E-3	
	10	1.26E-3	3.2	4.26E-4	3.2	3.99E-4	3.2
	11	1.20E-4	3.4	4.01E-5	3.4	3.61E-5	3.5
	12	1.65E-5	2.9	5.22E-6	2.9	4.76E-6	2.9
	15	2.97E-10	15.8	7.00E-11	16.2	7.67E-11	15.9
$a(t)$	9	1.60E-3		1.06E-3		3.78E-3	
	10	1.68E-4	3.3	1.10E-4	3.3	3.99E-4	3.2
	11	1.50E-5	3.5	1.08E-5	3.4	3.61E-5	3.5
	12	1.98E-6	2.9	1.39E-6	3.0	4.76E-6	2.9
	15	6.21E-11	15.0	3.64E-11	15.2	7.67E-11	15.9



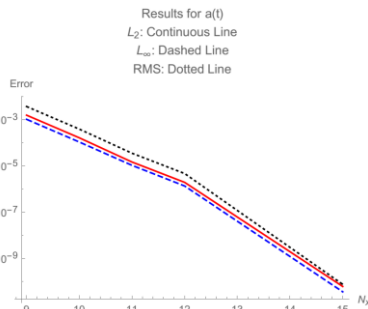
(ب) مثال ۱



(الف) مثال ۱

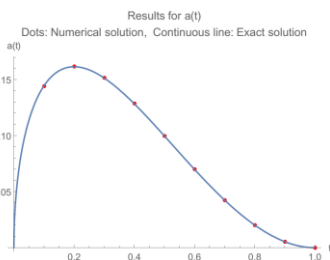


(د) مثال ۲

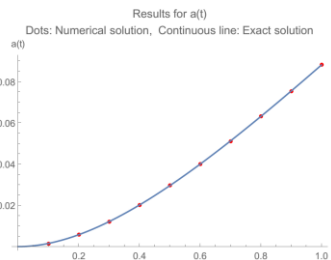


(ج) مثال ۲

شکل ۱. مقایسه دقت همگرایی خطاها: خط سرخ پیوسته برای L_2 ، خط دس آبی برای L_∞ و خط نقطه دار برای RMS برای مثال ۱ از نقاط شبکه چپیشف و برای دقت جواب مثال ۲ از نقاط (شبکه یکنواخت) استفاده شده است.



(ب) مثال ۲



(الف) مثال ۱

شکل ۲. جواب دقیق تابع ظرفیت گرما $a(t)$ و جواب تقریبی آن $a(t)_N$ با $M = 10$ مقایسه شده است.

۵. نتیجه گیری

در این مقاله روش‌های مربعات دیفرانسیل و مربعات انتگرال تعمیم یافته برای مسئله معکوس پارابولیک یک بعدی استفاده شده است. برای دقت و سرعت همگرایی مسئله معکوس، دو نوع از نقاط شبکه (یکنواخت و غیر یکنواخت) روی دو مثال بررسی شده است. بنابراین، با استفاده از خطاهای L_2 , L_∞ ، خطای ریشه میانگین مربعات، دقت و مرتبهٔ همگرایی مسئله منبع معکوس زمان-کسری یک بعدی در جدول‌ها آرایه و هم‌چنان نمودار خطاها توابع دما و ظرفیت گرما نیز مورد مقایسه قرار گرفته است و برای اثبات پایداری روش در مسئله مورد نظر یک اختلال اضافه شده و نتایج عددی قابل قبول برای توسعهٔ مسئله‌های معکوس به دست آمده است. این آزمایشات عددی نشان می‌دهد که روش‌های مورد نظر، به طور چشم‌گیر برای حل مسئله‌های معکوس پایدار هستند. در این تحقیق دریافتیم که استفاده از روش‌های مربعات دیفرانسیل و مربعات انتگرال تعمیم یافته برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی پارابولیک معکوس زمانی-کسری بسیار مفید و کاربردی است؛ زیرا با وجود اضافه نمودن اختلال، جواب‌های عددی هنوز با حل دقیق همگرا هستند.

۶. منابع

- Abdollahi, N., & Rostamy, D. (2019). Stability analysis for some numerical schemes Of partial differential equation with extra measurements. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 48(5), 1324-1335.
- Cannon, J. R., & Yin, H. M. (1989). A class of non-linear non-classical parabolic Equations. *Journal of differential equations*, 79(2), 266-288.
- Dehghan, M. (2003). Numerical solution of one-dimensional parabolic inverse Problem. *Applied mathematics and computation*, 136(2-3), 333-344.
- Daoud, D. S., & Subasi, D. (2005). A splitting up algorithm for the determination of The control parameter in multi-dimensional parabolic problem. *Applied Mathematics and computation*, 166(3), 584-595.
- Deng, Z. C., Yang, L., Yu, J. N., & Luo, G. W. (2013). Identifying the diffusion Coefficient by optimization from the final observation. *Applied Mathematics and Computation*, 219(9), 4410-4422.
- F. Tornabene, N., Fantuzzi, F. Ubertini, E. Viola (2015). Strong formulation finite Element Method based on differential quadrature: a survey. *Appl Mech Rev*, 67 020801-1-55.
- Huang, D., Li, Y., & Pei, D. (2018). Identification of a time-dependent coefficient in Heat conduction problem by new iteration method. *Advances in Mathematical Physics*, 1-7.
- Hazanee, A., Lesnic, D., Ismailov, M. I., & Kerimov, N. B. (2015). An inverse time-Dependent source problem for the heat equation with a non-classical boundary Condition. *Applied Mathematical Modelling*, 39(20), 6258-6272.

- Jiwari, R. (2015). Lagrange interpolation and modified cubic B-spline differential Quadrature methods for solving hyperbolic partial differential equations with Dirichlet and Neumann boundary conditions. *Computer Physics Communications*, 193, 55-65.
- Liao, W, Dehghan, M., & Mohebbi, A. (2009). Direct numerical method for an Inverse problem of a parabolic partial differential equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 232(2), 351-360.
- Li, C., Zhao, Z., & Chen, Y. (2011). Numerical approximation of nonlinear Fractional differential equations with sub-diffusion and super Diffusion. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(3), 855-875.
- Parand, K., & Rad, J. A. (2013). Kansa method for the solution of a parabolic Equation with an unknown spacewise-dependent coefficient subject to an extra Measurement. *Computer Physics Communications*, 184(3), 582-595.
- Shu, C. (2012). *Differential quadrature and its application in engineering*. Springer Science & Business Media, 29-128.
- Tatari, M., & Dehghan, M. (2007). He's variational iteration method for computing A control parameter in a semi-linear inverse parabolic equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 33(2), 671-677.
- Tornabene, F., Fantuzzi, N., & Baccocchi, M. (2018). Strong and weak Formulations based on differential and integral quadrature methods for the free Vibration analysis of composite plates and shells: convergence and Accuracy. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 92, 3-37.
- Yücel, U., & Boubaker, K. (2012). Differential quadrature method (DQM) and Boubaker polynomials expansion scheme (BPES) for efficient computation of The eigenvalues of fourth-order Sturm–Liouville problems. *Applied Mathematical Modelling*, 36(1), 158-167.
- Zhou, G., Wu, B., Ji, W., & Rho, S. (2015). Time-or space-dependent coefficient Recovery in parabolic partial differential equation for sensor array in the Biological computing. *Mathematical Problems in Engineering*.