



حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی سخت با روش های تک گامی

¹ پوهنیار غلام حسن دانشیار عضو کادر علمی دیپارتمنت ریاضی و فزیک، پوهنځی انجیرری، پوهنتون بلخ
پوهنیار غلام علی صابری عضو کادر علمی دیپارتمنت ریاضی و فزیک، پوهنځی انجیرری، پوهنتون بلخ

One-Step methods for numerical solution of nonlinear stiff fractional differential equations

Abstract

Fractional differential equations are the equations with real order, while the order of classical differential equations is positive integers. In this paper, a set of generalized numerical single-step methods for solving stiff nonlinear fractional differential equations is presented. We use the generalized one-step method and linear segment interpolation, to discretize these type of differential equations. The proposed combined methods are employed to solve stiff nonlinear fractional differential equations, where the derivative in the equation is of the Caputo type. In addition, the consistency, stability and convergence properties of the considered numerical methods are examined. In order to show the accuracy and efficiency of the methods, a numerical example is employed. The numerical solutions of differential equation produced by the numerical methods for different step sizes are recorded. Experimental results show that single-step numerical methods are also able to obtained satisfactory solutions with acceptable errors for the stiff fractional differential equations.

Keywords: Stiff fractional differential equations, Caputo derivative, One-Step methods, Consistency, Stability and Convergence.

چکیده

معادله دیفرانسیل کسری، معادله‌ای با مرتبه حقیقی می‌باشد، در حالی که مرتبه معادلات دیفرانسیل کلاسیک اعداد تام مثبت هستند. در این مقاله دسته‌ای از روش تک‌گامی تعمیم یافته برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی سخت ارائه شده است. روش تک‌گامی تعمیم یافته که ترکیبی از روش‌های تک‌گامی و درون یابی قطعه-قطعه خطی می‌باشد را برای گسسته سازی این نوع از معادلات به کار می‌بریم. روش ترکیبی مورد نظر برای حل معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی سخت که مشتق موجود در معادله از نوع کاپوتو می‌باشد، به کار میرود. همچنین سازگاری، پایداری

¹ Email: gh.h.danish@gmail.com



و همگرایی روش مورد نظر مورد بررسی قرار می‌گیرد. در پایان برای نشان دادن دقت و کارایی روش، مثال عددی ارائه شده است که حل عددی معادله دیفرانسیل مطرح شده در مثال، با طول گام‌های متفاوت دریافت گردید. نتایج تجربی نشان می‌دهد که روش‌های عددی تک‌گامی نیز قادر به دریافت حل قناعت بخش با خطای قابل قبول برای معادله دیفرانسیل کسری سخت می‌باشند.

کلید واژه: پایداری، سازگاری، همگرایی، روش‌های تک‌گامی، معادلات دیفرانسیل کسری سخت، مشتق کاپوتو.

۱. مقدمه

حساب دیفرانسیل کسری یکی از شاخه‌های آنالیز ریاضی است، که به بررسی و تحقیق در خصوص انتگرال و مشتقات مراتب دلخواه و کاربردهای آن می‌پردازد. بنابراین، مباحث ریاضی امروزه که تحت عنوان حسابان کسری رخ می‌دهد به مراتب با حسابان کسرها (علامتی که برای تقسیم کردن در ذهن داریم) فرق می‌کند. در واقع «انتگرال گیری و مشتق گیری از مرتبه دلخواه» عبارتی دقیق‌تر به جای حسابان کسری می‌باشد. مرتبه دلخواه می‌تواند هر عدد حقیقی باشد. در دو دهه اخیر محققان متوجه شدند که مشتقات و انتگرال‌ها از مرتبه غیر صحیح برای توصیف بسیاری از پدیده‌ها و موارد مختلف مدل‌های پیچیده زندگی مفید هستند. تحقیقات نشان می‌دهد که در بسیاری موارد مدل سازی‌های جدید بر اساس مشتقات کسری بسیار مناسب‌تر از مدل سازی بر اساس مشتقات صحیح می‌باشند (میلر و راس، ۱۹۹۵). گاهی اوقات مشتقات با مرتبه صحیح در مقایسه با نتایج تجربی بدست آمده در تناقض است و استفاده از مشتقات با مرتبه کسری مناسب‌تر هستند. به همین دلیل در این مقاله قصد داریم به بررسی روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل سخت پردازیم که مشتق موجود در معادله از مرتبه کسری می‌باشد. مدل سازی بسیاری از مسائل فزیک، کیمیا و علوم انجیری به معادلات دیفرانسیل سخت منجر می‌شود. با توجه به موارد مطرح شده، حل عددی اینگونه معادلات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این تحقیق می‌تواند زمینه شناخت این مفهوم را برای محققین فراهم نماید.

همان طور که اشاره شد، معادلات دیفرانسیل سخت نقش مهمی در علوم مختلف دارد. بنابراین یکی از اساسی ترین مسائل آنالیز عددی، حل دستگاه این نوع از معادلات می‌باشد. بنابراین اهمیت موضوع در این مقاله این است که به ارائه‌ی یک روش تک‌گامی تعمیم یافته برای حل معادلات



دیفرانسیل کسری غیرخطی سخت^۱ (SFDEs) می‌پردازیم. حال سوال اصلی اینجاست که چطور می‌توان این مسائل را حل کرد؟ و سوالات دیگر را نیز می‌توان به شکل زیر مطرح کرد.

- چه روش‌های برای حل این نوع معادلات دیفرانسیل وجود دارد؟
- مناسب ترین روش برای حل این گونه معادلات دیفرانسیل کدام است؟
- آیا روش مورد نظر برای حل این گونه معادلات دیفرانسیل سازگار، پایدار و همگراست؟

روش‌های عددی متعددی برای حل این طبقه از معادلات دیفرانسیل غیر خطی پیچیده بکار برده شده است، که می‌توان به موارد ذیل اشاره کرد:

مک کی^۲ و استوکس^۳ در (دیتلم، ۲۰۱۰) و (کیلباس، ۲۰۰۶) روش‌های انتگرالگیری ضرب، تانگ^۴ و برانر^۵ در (پادلانی، ۱۹۹۹) روش‌های هم محلی چند جمله‌ای اسپلاین را بکار می‌برند، هریر^۶ و مس^۷ در (مکی و استوکس، ۱۹۸۳) روش‌های چند گامی خطی کسری را ارائه دادند، وانگ^۸، ژا^۹ و ژانگ^{۱۰} در (ژا و ژانگ، ۲۰۱۹) از روش‌های مقدار مرزی گسترش یافته استفاده کردند، دال کویست^{۱۱} در (دیتلم، ۲۰۱۰) روش‌های تک‌گامی را در سال ۱۹۷۶ پیشنهاد کرد. این نوع روش‌ها مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفت و برای حل معادلات دیفرانسیل جبری و معادلات دیفرانسیل انتگرال به بهترین وجه مورد استفاده قرار گرفت. (میرزایی، ۱۳۹۳).

روش تحقیق این مقاله طوری است که یک طبقه از روش‌های تک‌گامی گسترش یافته را برای حل معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی سخت بکار می‌گیریم. وقتی یک مسئله به یک مدل ریاضی تبدیل می‌شود، سپس یک روش عددی برای حل آن طراحی و الگوریتم آن روی کامپیوتر نوشته و اجرا می‌شود، در نهایت جواب تقریبی حاصل می‌شود که با جواب واقعی مسئله یکسان نخواهد بود. در واقع جواب تقریبی دارای خطاست و ما مایلیم این خطا همواره قابل کنترل باشد. انواع مختلف

¹ *Stiff Fractional Differential Equations*

² *McKee*

³ *Stokes*

⁴ *Tang*

⁵ *Brunner*

⁶ *Hairier*

⁷ *Mass*

⁸ *Wang*

⁹ *Zhou*

¹⁰ *Zhang*

¹¹ *Dahlquist*



خطا روی نتایج یک الگوریتم عددی تأثیرگذار هستند. برخی از منابع خطا را به سختی می‌توان کنترل کرد، در حالی که برخی را می‌توان با بازنویسی الگوریتم به فرم دیگر یا ایجاد تغییرات در آن کاهش داد و یا حتی از بین برد. گاهی خطاها در طول الگوریتم بزرگ و بزرگتر می‌شوند و گاهی روبه افول می‌روند. چنانچه خطاها در طول الگوریتم بزرگ شوند، این بزرگی می‌تواند کیفیت جواب خروجی مسئله را به شکل بدی تحت تأثیر قرار دهد که در این حالت اصطلاحاً گفته می‌شود روش عددی پایدار نیست. در این مقاله قصد داریم در ابتدا پایداری، سازگاری و همگرایی روش مورد نظر را بررسی نموده و در گام دوم با حل مثال عددی نشان دهیم که روش مورد نظر برای حل این‌گونه معادلات مفید است. برای اجرای بخش تجربی و حل سوالات، از زبان برنامه نویسی متلب استفاده کرده و گراف‌ها نیز توسط همین برنامه ترسیم می‌گردد.

۲. مشتقات کسری

همان طور که در مقدمه ذکر شد چندین روش برای بیان مفهوم حسابان کسری وجود دارد. در اینجا ما یک نوع از رایج ترین مشتقات کسری که در کاربردها، فراوان از آن استفاده می‌شود، را معرفی نموده و خواص مربوط به آنها را بیان می‌کنیم.

مشتق کسری کاپوتو

مشتق کسری کاپوتو نقش مهمی در توسعه نظریه مشتقات و انتگرال کسری و کاربردهای آن در ریاضیات محض دارد. تعریف که کاپوتو ارائه داده، عبارت است از:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (1)$$

که در آن $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n[a, b]$ می‌باشند (دیتلم، ۲۰۱۰).



معادلات دیفرانسیل سخت

در ریاضیات، معادله سخت یک معادله دیفرانسیل است که روش‌های عددی برای حل آن ناپایدار است. تعریف دقیقی از معادله سخت وجود ندارد اما عقیده اصلی این است که معادله سخت شامل برخی جملات می‌باشد که می‌تواند منجر به ناپایداری شود (نیا، ۱۳۸۵).
به عنوان مثال معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y' = -100y + 10 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

این معادله حالت خاصی از معادله به شکل زیر است:

$$y' + p(x)y + q(x) = 0.$$

می‌دانیم جواب معادله اخیر در حالت کلی عبارتست از:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right],$$

بدین ترتیب جواب معادله (2) عبارتست از:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int 100dx} \left[C - \int 10e^{\int 100dx} dx \right] \\ &= e^{-100x} \left[C - \int 10e^{100x} dx \right] \\ &= e^{-100x} \left[C - \frac{1}{10} e^{100x} \right] \\ &= C e^{-100x} - \frac{1}{10}, \end{aligned}$$

با استفاده از شرط اولیه $y(0) = 1$ می‌توان جواب نهایی (2) را به صورت زیر بدست آورد:

$$y = \frac{11}{10} e^{-100x} - \frac{1}{10}.$$

که این معادله سخت است. هنگامی که نمودار y را رسم می‌کنیم در نزدیکی صفر نوسانات شدیدی دارد و رفتار y بسیار پیچیده است. در حل عددی چنین معادلاتی انتخاب طول گام بسیار حساس است و ممکن است روش‌های عددی جواب‌هایی با خطاهای بزرگ تولید کنند (نیا، ۱۳۸۵).



۳. معرفی روش حل معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی سخت

معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی نقش مهمی در علوم مختلف مانند فیزیک، زیست شناسی، تئوری کنترل و غیره دارد. هنگامی که سیستم های کنترل شده یا کنترل کننده و یا هر دوی آن ها توسط یک معادله دیفرانسیل با مشتقات کسری تشریح می شوند، انتگرال ها و مشتقات کسری در نظریه کنترل سیستم های دینامیکی نیز ظاهر می شوند. از کاربردهای دیگر مشتقات کسری می توان به مدل سازی معادلات انتشار نور و معادله جابجایی و پراکندگی افقی هوا در یک زمان کسری، فرآیندهای الکتروشیمیایی و نظریه پردازش سیگنال اشاره کرد. همچنان یکی از اساسی ترین مسائل آنالیز عددی، حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی سخت می باشد، زیرا برای حل بسیاری از مسائل علوم و مهندسی، با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی سخت به شکل زیر پرداخته می شود (ژا و ژانگ، ۲۰۱۹):

$$y'(t) = f(t, y(t), {}^C D_t^\gamma y(t)), t \in (t_0, T]; \quad y(t_0) = y_0, \quad (3)$$

در رابطه (3) مشتق کاپوتو از مرتبه γ ($0 < \gamma < 1$) بوده،

و $f: (t_0, T] \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ یک تابع به اندازه کافی هموار می باشد به طوری که در شرایط لیبشیتس یک طرفه و کلاسیک زیر با ثابت های $L_1, L_2 \geq 0$ صدق می کند:

$$\Re \langle y - \hat{y}, f(t, \hat{y}, z) \rangle \leq L_1 \|y - \hat{y}\|^2, \quad (4)$$

$$t \in (t_0, T]; \quad y, \hat{y}, z \in \mathbb{C}^d,$$

$$\|f(t, y, z) - f(t, y, \hat{z})\| \leq L_2 \|z - \hat{z}\|^2, \quad (5)$$

$$t \in (t_0, T]; \quad y, z, \hat{z} \in \mathbb{C}^d.$$

طوری که در آن \mathbb{C}^d فضای مختلط d می باشد.

برای گسسته سازی این نوع از معادلات روش تک گامی تعمیم یافته که ترکیبی از روش های تک گامی و درون یابی قطعه-قطعه خطی می باشد را به کار می بریم.

روش های تک گامی تعمیم یافته

در این بخش یک رده از روش های عددی جدید برای حل مسئله (3) ارائه خواهد شد. این روش با ترکیب روش های تک گامی با درونیابی خطی ساخته می شود. به همین دلیل در ادامه به معرفی روش های تک گامی می پردازیم (ژا و ژانگ، ۲۰۱۹).



$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, T]; \quad y(t_0) = y_0 \quad (6)$$

براساس مطالب گفته شده فوق، یک روش تک گامی n -مرحله‌ای را می‌توان به شکل زیر بیان نمود:

$$\rho(E)y_n = hf(\sigma(E)t_n, \sigma(E)y_n), \quad n \geq 0, \quad (7)$$

y_n یک تقریب از $y(t_n)$ است، $t_n = t_0 + nh$ ، $(N \in \mathbb{N})$ ، $h = (T - t_0)/N$ ، عملگر انتقال نامیده می‌شود که به صورت $Ey_n = y_{n+1}$ تعریف می‌شود و ρ و σ دو تابع چند جمله‌ای همراه با ضرایب حقیقی و α_j ها و β_j ها به صورت زیر هستند،

$$\rho(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_j x^j, \quad \sigma(x) = \sum_{j=0}^k \beta_j x^j,$$

شرایط سازگاری به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\rho(1) = 0, \quad \rho'(1) = \sigma(1) = 1.$$

از دومین شرط بدست آمده برای سازگاری یعنی $\rho'(1) = \sigma(1) = 1$ می‌توان نتیجه گرفت

$$\sigma(E)t_n = t_n + \sigma'(1)h,$$

حال اگر فرض کنیم $\mu \in [0, 1]$ و $m \in [1, k]$ ، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sigma(E)t_n = t_{n+m-\mu} = t_0 + (n + m - \mu)h.$$

با بکار بردن روش‌های تک گامی (6) برای حل مسئله (3) رابطه‌ای به شکل زیر تولید می‌کند:

$$\rho(E)y_n = hf(\sigma(E)t_n, \sigma(E)y_n, z_{n+m-\mu}), \quad n \geq 0, \quad (8),$$

در رابطه (9) صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} z(\sigma(E)t_n) &:= {}^C D_t^\gamma y(\sigma(E)t_n) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_{t_0}^{\sigma(E)t_n} \frac{y'(v)}{(\sigma(E)t_n - v)^\gamma} dv. \end{aligned} \quad (9)$$

جهت بدست آوردن یک تقریب برای $z_{n+m-\mu}$ ، ابتدا درونیایی خطی $y(t)$ را در $[t_{j-1}, t_j]$ با جمله باقیمانده $r_j(t)$ در نظر می‌گیریم:



$$y(t) = \frac{t - t_j}{t_{j-1} - t_j} y(t_{j-1}) + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} y(t_j) + r_j(t),$$

$$t \in [t_{j-1}, t_j]. \quad (10)$$

که در آن $t_{j-1} < \xi_j < t_j$ ، $r_j = \frac{1}{2}(t - t_j)(t - t_{j-1})y''(\xi_j)$ ، قرار می‌دهیم:

$$L_j(t) = \frac{t - t_j}{t_{j-1} - t_j} y(t_{j-1}) + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} y(t_j),$$

در واقع $L_j(t)$ درونیاب خطی ساخته شده به روش لاگرانژ برای تقریب $y(t)$ می‌باشد. با استفاده از (9) و (10) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} & z(t_{n+m-\mu}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \left[\sum_{j=1}^{n+m-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{L'_j(t)}{(t_{n+m-\mu} - v)^\gamma} dv \right. \\ & \left. + \int_{t_{n+m-1}}^{t_{n+m-\mu}} \frac{L'_{n+m}(t)}{(t_{n+m-\mu} - v)^\gamma} dv \right] + \hat{r}_{n+m-\mu} \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=1}^{n+m-1} \frac{y(t_j) - y(t_{j-1})}{t_n + (j-n)h - t_n - (j-1-n)h} [(n+m-\mu-j \\ & + 1)^{1-\gamma} - (n+m-\mu-j)^{1-\gamma}] h^{1-\gamma} \\ & + \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \frac{y(t_{n+m}) - y(t_{n+m-1})}{t_n + mh - t_n - (m-1)h} [t_n + (m-\mu)h - t_n \\ & - (m-1)h]^{1-\gamma} + \hat{r}_{n+m-\mu}, \end{aligned} \quad (11)$$

جمله خطای حاصل از بکار بردن تقریب به کار رفته می‌باشد. با کنار گذاشتن این جمله در (11) یک فرمول تقریبی برای $Z_{n+m-\mu}$ به شرح زیر بدست می‌آید. ابتدا نمادهای زیر را تعریف می‌کنیم، قرار می‌دهیم $\omega_l^{(\gamma)} = (l+1)^{1-\gamma} - l^{1-\gamma}$ و برای $n=0$ و $m=1$ $\omega_0^{(\gamma)}$ قرار می‌دهیم $-\omega_1^{(\gamma)} = (1-\mu)^{1-\gamma}$ و برای $n+m \geq 2$ ، نماد $\omega_j^{(\gamma)}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\omega_j^{(\gamma)} = \begin{cases} (1 - \mu)^{1-\gamma}, & j = 0, \\ a_{1-\mu}^{(\gamma)} - (1 - \mu)^{1-\gamma}, & j = 1, \\ a_{j-\mu}^{(\gamma)} - a_{j-\mu-1}^{(\gamma)}, & 2 \leq j \leq n + m - 1, \\ -a_{n+m-\mu-1}^{(\gamma)}, & j = n + m. \end{cases} \quad (12)$$

با استفاده از نمادهای تعریف شده فرمول تقریبی زیر برای $Z_{n+m-\mu}$ به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} z(t_{n+m-\mu}) &= \frac{h^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \left[\sum_{j=1}^{n+m-1} a_{n+m-\mu-1}^{(\gamma)} (y(t_j) - y(t_{j-1})) + (1 - \mu)^{1-\gamma} (y(t_{n+m}) - y(t_{n+m-1})) \right] \\ &= \frac{h^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^{n+m} \omega_j^{(\gamma)} y(t_{n+m-j}), \end{aligned} \quad (13)$$

ترکیبی از فرمول (8). یک فرمول تعمیم یافته از روش های تک گامی (13) را بدست می دهد.

۴. نتایج عددی

در این بخش، آزمایش عددی را برای کارایی و دقت روش های تک گامی تعمیم یافته انجام می دهیم. از جمله این روش ها، روش تعمیم یافته ضمنی اوپلر است که یکی از مشهورترین روش های تک گامی تعمیم یافته می باشد، روش مذکور برای حل مسئله (8) فرمولی به شکل زیر دارد که با استفاده از فرمول های (7) و (12) بدست می آید.

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= hf(t_{n+1}, y_{n+1}, Z_{n+1}), \\ Z_{n+1} &= \frac{h^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^{n+1} \omega_j^{(\gamma)} y_{n-j+1}. \end{aligned} \quad (14)$$

از روابط (9) و (10) که برای (8) تعریف شده، نتیجه می شود که روش ضمنی اوپلر (19)، از مرتبه 1 همگرا، پایدار و سازگار می باشد (دیتلم، ۲۰۱۰).

مثال. مسئله غیرخطی سخت دو بعدی زیر را در نظر بگیرید (ژا و ژانگ، ۲۰۱۹):

$$y'(t) = Ay(t) + G(t, y(t), {}_0^C D_t^\gamma y(t)),$$

$$y \in (0,1) \quad t \in [0,5\pi]; \quad y(0) = (0,1)^T, \quad (15)$$

که در آن :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 98 & -99 \end{pmatrix}, \quad G(t, y(t), {}_0^C D_t^\gamma y(t)) = \begin{pmatrix} \frac{u^2(t)}{1+u^2(t)} - \sin({}_0^C D_t^\gamma u(t)) + g_1(t) \\ \frac{\omega^2(t)}{1+\omega^2(t)} - \cos({}_0^C D_t^\gamma \omega(t)) + g_2(t) \end{pmatrix},$$

$y(t) = (u(t), \omega(t))^T$ و توابع g_i , $i = 1,2$ طوری انتخاب می‌شود که جواب دقیق مسئله (15) به صورت زیر باشد:

$$y(t) = (\sin t, \cos t)^T \quad (16)$$

با در نظر گرفتن $y(t) = (u(t), \omega(t))^T$ معادله (15) را می‌توان به فرم گسترده زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} u'(t) \\ \omega'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 98 & -99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{u^2(t)}{1+u^2(t)} - \sin({}_0^C D_t^\gamma u(t)) + g_1(t) \\ \frac{\omega^2(t)}{1+\omega^2(t)} - \cos({}_0^C D_t^\gamma \omega(t)) + g_2(t) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

با توجه به جواب دقیق، توابع $g_1(t)$ و $g_2(t)$ به شکل زیر بدست می‌آید:

$$g_1(t) = 2 \sin t - \frac{\sin^2(t)}{1 + \sin^2(t)} + \sin \left(t^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{\Gamma(2n+1-\gamma)} \right), \quad (18)$$

$$g_2(t) = 99 \cos t - 99 \sin t - \frac{\cos^2(t)}{1 + \cos^2(t)} + \cos \left(t^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{\Gamma(2n+1-\gamma)} \right), \quad (19)$$

حال می خواهیم روش عددی تک گامی تعمیم یافته ضمنی اوپلر (14) را برای مسئله غیر خطی سخت (17) به کار ببریم، لذا داریم:

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} - u_n \\ \omega_{n+1} - \omega_n \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 98 & -99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ \omega_{n+1} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} \frac{u_{n+1}^2}{1 + u_{n+1}^2} - \sin(z_{n+1}) + g_1^{n+1} \\ \frac{\omega_{n+1}^2}{1 + \omega_{n+1}^2} - \cos(z_{n+1}) + g_2^{n+1} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

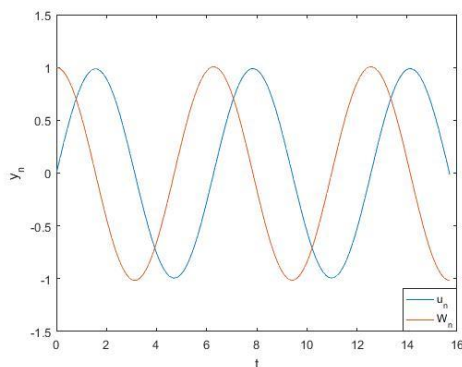
از روابط (20)، می توان روابط ذیل را بدست آورد:

$$u_{n+1} - u_n = h \left[-2u_{n+1} + \omega_{n+1} + \frac{u_{n+1}^2}{1 + u_{n+1}^2} - \sin(z_{n+1}) + g_1^{n+1} \right]. \quad (21)$$

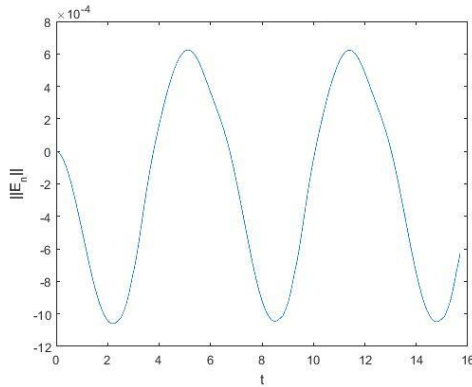
$$\omega_{n+1} - \omega_n = h \left[98u_{n+1} - 99\omega_{n+1} + \frac{\omega_{n+1}^2}{1 + \omega_{n+1}^2} - \cos(z_{n+1}) + g_2^{n+1} \right]. \quad (22)$$

همچنین جهت سنجش کارایی محاسبات و دقت روش (14)، خطای زیر را معرفی می نماییم:

$$E_n := y(t_n) - y_n,$$



شکل ۱: حل عددی y_n مثال عددی با $\gamma = 0.6$ که با استفاده از روش (14) با $h = \frac{\pi}{64}$ حل گردیده است



شکل ۲: خطای جواب تقریبی مثال بدست آمد از روش (14) به ازای $h = \frac{\pi}{64}$ و $\gamma = 0.6$.

جدول ۱: خطای جواب بدست آمده مثال عددی برای $u(t)$ با استفاده از روش (14)، به ازای

$$\gamma = 0.1, 0.3, 0.6, 0.9$$

γ	$h = \frac{\pi}{64}$	$h = \frac{\pi}{128}$	$h = \frac{\pi}{256}$	$h = \frac{\pi}{512}$	$h = \frac{\pi}{1024}$
۰.۱	۰.۰۱۶۸	۰.۰۰۸۵	۰.۰۰۴۲	۰.۰۰۲۱	۰.۰۰۱۱
۰.۳	۰.۰۱۶۶	۰.۰۰۸۲	۰.۰۰۴۱	۰.۰۰۲۰	۰.۰۰۱۱
۰.۶	۰.۰۱۹۱	۰.۰۰۹۳	۰.۰۰۴۵	۰.۰۰۲۲	۰.۰۰۱۱
۰.۹	۰.۰۲۸۷	۰.۰۱۴۰	۰.۰۰۶۹	۰.۰۰۳۴	۰.۰۰۱۶

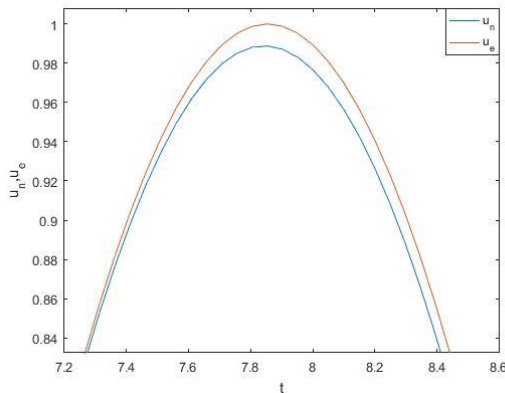
جدول ۲: خطای جواب بدست آمده مثال عددی برای $\omega(t)$ با استفاده از روش (14)، به ازای

$$\gamma = 0.1, 0.3, 0.6, 0.9$$

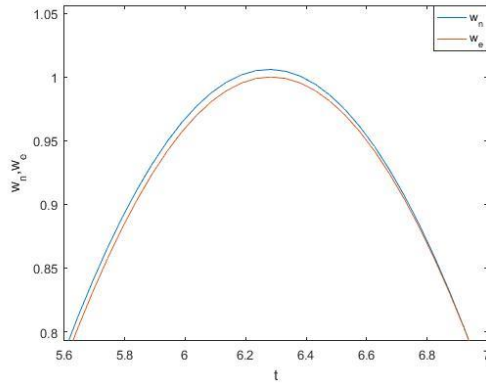
γ	$h = \frac{\pi}{64}$	$h = \frac{\pi}{128}$	$h = \frac{\pi}{256}$	$h = \frac{\pi}{512}$	$h = \frac{\pi}{1024}$
۰.۱	۰.۰۱۶۳	۰.۰۰۸۲	۰.۰۰۴۱	۰.۰۰۲۰	۰.۰۰۱۰
۰.۳	۰.۰۱۶۰	۰.۰۰۸۰	۰.۰۰۴۰	۰.۰۰۲۰	۰.۰۰۱۰
۰.۶	۰.۰۱۸۵	۰.۰۰۹۰	۰.۰۰۴۴	۰.۰۰۲۲	۰.۰۰۱۱
۰.۹	۰.۰۲۸۰	۰.۰۱۳۷	۰.۰۰۶۷	۰.۰۰۳۳	۰.۰۰۱۶



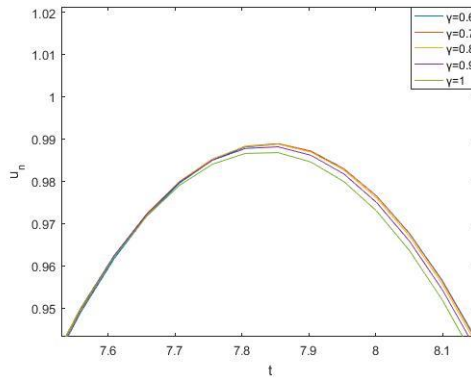
با بکار بردن روش (14) به ازای $h = \frac{\pi}{(64 \times 2^t)}$ ، $t = 0, 1, \dots, 4$ برای مثال ۱، می‌توانیم جواب‌های عددی مربوطه را بدست آوریم. جواب عددی $y_n = (u_n, \omega_n)^T$ که با استفاده از روش (14) به ازای $h = \frac{\pi}{64}$ و $\gamma = 0.6$ بدست آمده در شکل 1 رسم شده است. همچنین نرم L_2 خطای جواب عددی در شکل 2 رسم شده است. همچنین خطای حاصل از بکار بردن روش (20) برای بدست آوردن مقدار تقریبی $u(t)$ و $\omega(t)$ به ازای h و γ های مختلف در جدول 1 و 2 نمایش داده شده است. به علاوه جهت مقایسه گراف جواب دقیق و گراف جواب تقریبی بدست آمده از روش مورد نظر، بزرگ‌نمایی گراف جواب‌ها را بر بخشی از انتروال $[0, 5\pi]$ در شکل‌های 3 و 4 نمایش داده‌ایم. همچنین بزرگ‌نمایی گراف جواب‌های تقریبی بدست آمده را به ازای γ های مختلف در شکل 5 و 6 نمایش داده‌ایم. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد روش تک‌گامی تعمیم یافته قابل قبول بوده و دقت محاسباتی جواب‌های تقریبی با یافته‌های تیوری مطرح شده، مطابقت دارد.



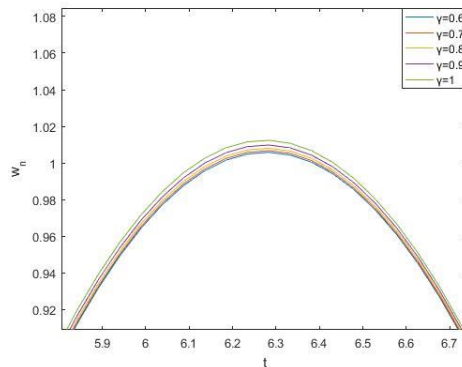
شکل ۳: گراف جواب دقیق (u_e) و جواب تقریبی (u_n) مثال عددی به ازای $\gamma = 0.6$ که با استفاده از روش (14) با $h = \frac{\pi}{64}$ حل گردیده است.



شکل ۴: گراف جواب دقیق (w_e) و جواب تقریبی (w_n) مثال عددی به ازای $\gamma = 0.6$ که با استفاده از روش (14) با $h = \frac{\pi}{64}$ حل گردیده است.



شکل ۵: جواب‌های تقریبی u_n به ازای مقادیر مختلف γ



شکل ۶: جواب‌های تقریبی w_n به ازای مقادیر مختلف γ



۵. نتیجه گیری

در حقیقت اکثر پدیده‌های طبیعی با تغییر زمان یا مکان تغییر می‌کنند و مدل کردن این تغییرات منجر به یک معادله دیفرانسیل می‌شود. که در این مقاله معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی سخت مورد مطالعه قرار گرفته است. حساب دیفرانسیل کسری یکی از شاخه‌های آنالیز ریاضی است، که به بررسی و تحقیق در خصوص انتگرال و مشتقات مراتب دلخواه و کاربردهای آن می‌پردازد. تحقیقات نشان می‌دهد که در بسیاری موارد مدل سازی‌های جدید بر اساس مشتقات کسری بسیار مناسب‌تر از مدل سازی بر اساس مشتقات صحیح می‌باشند. همچنان معادله سخت یک معادله دیفرانسیل است که روش‌های عددی برای حل آن ناپایدار است. مدل سازی بسیاری از مسائل فزیک، کیمیا و علوم انجینیری به معادلات دیفرانسیل سخت منجر می‌شود. به عنوان مثال در کنترل یک وسیله نقلیه فضایی که انتظار می‌رود مسیر کاملاً هموار باشد اما در مسیر پرواز انحرافات آشکار می‌شود، مدل سازی این پدیده منجر به معادلات دیفرانسیل سخت می‌شود. با توجه به موارد مطرح شده، حل عددی اینگونه معادلات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. با ترکیب روش‌های اساسی تک‌گامی و درونیایی قطعه - قطعه خطی، یک رده از روش‌های تک‌گامی تعمیم یافته برای حل معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی با مشتقات کاپوتو به دست آمد. روش‌های به دست آمده همگرا از مرتبه $\min\{p, 2 - \gamma\}$ که در آن p مرتبه سازگاری متناسب با روش تک‌گامی می‌باشد. که درحقیقت روش‌های تک‌گامی به یک روش عددی تک مرحله‌ای گفته می‌شود که در آن مقدار γ در گام $i + 1$ فقط به مقدار γ در یک گام زمانی قبل یعنی گام i نام بستگی دارد. در این روش‌ها با فرض معلوم بودن جواب در گام i نام جواب در گام $i + 1$ نام بدست می‌آید. همچنان نتایج عددی بدست آمده نشان می‌دهد روش تک‌گامی تعمیم یافته قابل قبول بوده و دقت محاسباتی جواب‌های تقریبی با یافته‌های تئوری مطرح شده مطابقت دارد.

۶. منابع

۱. کرایه چیان، ا. (۱۳۸۶). محاسبات عددی، دانشگاه فردوسی مشهد، رواق مهر.
۲. میرزائی، د. (۱۳۹۳). آنالیز عددی پیشرفته، دانشگاه اصفهان، چاپ دوم.
۳. نیا، ر. (۱۳۸۵). آنالیز عددی دو، دانشگاه علم و صنعت ایران دانشکده ریاضی، چاپ اول.
4. Miller, K. S., & Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. (*No Title*).
5. Dahlquist, G. (1978). G-stability is equivalent to A-stability. *BIT Numerical Mathematics*, 18, 384-401.
6. Diethelm, K., & Ford, N. J. (2010). The analysis of fractional differential



- equations. *Lecture notes in mathematics*, 2004.
7. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations* (Vol. 204). elsevier.
 8. Li, S. (2010). Numerical Analysis for stiff ordinary and functional differential equations. *Xiangtan University Press, Xiangtan*.
 9. Oldham K. B. and Spanier J., (1974), *The fractional calculus*, Academic Press, New York, Landon.
 10. Podlubny I., (1999), *Fractional differential equations*, Academic Press, San Diego.
 11. Zhou, Y., & Zhang, C. (2019). One-leg methods for nonlinear stiff fractional differential equations with Caputo derivatives. *Applied Mathematics and Computation*, 348, 594-608.